

FÍSICA NUCLEAR

Carlos A. Bertulani

1 - OS NÚCLEONS E OS PÍONS

1.1 - Os Núcleons

As experiências de espalhamento feitas por Rutherford em 1911 [Ru11] levaram o mesmo a propor um modelo atômico em que quase toda a massa do átomo estava contida em uma pequena região de seu interior, denominada *núcleo*. O núcleo deveria conter todas as cargas positivas do átomo, o restante do espaço atômico sendo preenchido pelas cargas negativas.

O próprio Rutherford pôde, em 1919 [Ru19], por intermédio da reação nuclear



detectar isoladamente as partículas de carga positiva que integram o núcleo, denominadas *prótons*. O próton, com símbolo p, que é o núcleo do átomo de hidrogênio, possui carga $+e$ de mesmo valor absoluto que a do elétron, e massa

$$m_p = (938,2723 \pm 0,0003) \text{ MeV}/c^2. \quad (1.2)$$

Do estudo da molécula de hidrogênio se conclui que os prótons da molécula podem ser dispostos de duas maneiras distintas. Os spins dos dois prótons podem estar paralelos, como no *ortohidrogênio*, ou antiparalelos, como no *parahidrogênio*. Cada próton possui duas orientações possíveis relativamente ao spin do outro próton, e dessa forma, como o elétron, o próton possui spin $\frac{1}{2}$.

No *ortohidrogênio* a função de onda é simétrica com respeito ao intercâmbio dos spins dos dois prótons, já que eles tem o mesmo sentido, e a experiência mostra que a função de onda é antissimétrica em relação ao intercâmbio das coordenadas espaciais dos prótons; isso justifica o fato da função de onda ser antissimétrica em relação intercâmbio completo dos prótons. No *parahidrogênio* a função de onda também é antissimétrica em relação ao intercâmbio completo dos dois prótons, sendo antissimétrica em relação ao intercâmbio dos spins dos prótons e simétrica com respeito ao intercâmbio das suas coordenadas espaciais. Esse estudo mostra que os prótons obedecem à estatística de Fermi-Dirac; eles são *férmions* e a eles é aplicável o Princípio de Exclusão de Pauli: só pode existir no máximo um próton em um dado estado quântico.

O *nêutron*, com símbolo n, possui carga zero, spin $\frac{1}{2}$, e massa

$$m_n = (939,5656 \pm 0,0003) \text{ MeV}/c^2. \quad (1.3)$$

A existência do nêutron começou a se tornar manifesta por volta de 1930. Nesse ano, Bothe e Becker [BB31] descobriram que uma radiação muito penetrante era liberada quando se bombardeava o berílio com partículas α ; naquela época se imaginava que essa radiação penetrante eram raios gama (fótons de alta energia). Em 1932, Curie e Joliot [CJ32] descobriram que a radiação era capaz de arrancar prótons de um material rico em hidrogênio, e eles sugeriram que isto era devido ao espalhamento Compton, i.e., que os prótons estavam recuando após espalhar os raios gama. Essa hipótese, no entanto, implicava em que a radiação consistia de raios gama extremamente energéticos, e nenhuma explicação podia ser dada para a origem de tão altas energias. Ainda em 1932, em um artigo publicado na revista *Nature*, Chadwick [Ch32] mostrou que os prótons ejetados do material rico em hidrogênio tinham colidido com partículas neutras com massa aproximadamente igual a do próton. Eram essas partículas neutras que compunham a radiação penetrante descoberta por Bothe e Becker. A reação que ocorria quando o berílio era bombardeado com partículas α era



A existência do nêutron também era necessária para explicar observações do espectro molecular, as quais mostraram, por exemplo, que as funções de onda das moléculas de nitrogênio eram simétricas em relação ao intercâmbio dos dois núcleos de ${}^{14}\text{N}$, e que, conseqüentemente, os núcleos ${}^{14}\text{N}$ eram *bósons*. Isto não poderia ser explicado se o núcleo ${}^{14}\text{N}$ fosse composto sómente de prótons e elétrons, já que isto exigiria 14 prótons e 7 elétrons, o que constitui um número ímpar de férmions; o intercâmbio de dois sistemas deste tipo pode ser feita pelo intercâmbio dos seus férmions constituintes, e cada troca de dois férmions muda o sinal da função de onda total. Do mesmo modo, se pode concluir que um sistema composto de um número par de férmions é um bóson. Este raciocínio mostra que se o núcleo ${}^{14}\text{N}$ for constituído de 7 prótons e 7 nêutrons ele é um bóson, supondo que o nêutron seja um férmion. Desse modo, o estudo da molécula N_2 levou Heitler e Hertzberg [HH29] a concluírem que os núcleos atômicos são compostos de prótons e nêutrons (e não de prótons e elétrons), supondo que o nêutron seja um férmion.

Inúmeros outros estudos vieram a confirmar que os nêutrons obedecem ao Princípio da Exclusão de Pauli e, portanto, são férmions, possuindo spin $\frac{1}{2}$. Lembremos que as partículas com spins fracionários $(2n + 1)/2$ são férmions, e que partículas com spin inteiro são bósons. O próton e o nêutron possuem propriedades similares em muitos aspectos, e é conveniente utilizar o nome genérico de *núcleon* para ambos.

1.2 - A Origem das Forças Nucleares

A origem da força coulombiana entre partículas carregadas é devida à troca de fótons entre elas; isso está simbolizado no *diagrama de Feynman* (a) da fig. 1.1. Nesse diagrama as partículas carregadas, no caso os prótons, são representadas por linhas orientadas de baixo para cima; essa orientação simboliza o sentido com o qual o tempo

aumenta. Em um dado instante as partículas trocam um fóton, que dá origem à atração, ou repulsão, entre elas. O fóton possui massa zero e a força coulombiana é de longo alcance.

As forças entre núcleons são de curto alcance. Em 1935 Yukawa [Yu35] sugeriu que essas forças nucleares originavam-se da troca de partículas de massa de repouso finita entre os núcleons.

Fig. 1.1 - Diagramas que simbolizam (a) a interação eletromagnética, que se dá pela troca de fótons, e (b) a interação nuclear, devido à troca de mésons.

Essas partículas são chamadas de *mésons* e essa situação está descrita pelo diagrama de Feynman da figura 1.1(b). Na emissão de um méson de massa de repouso M , a energia total do sistema núcleon-núcleon deixa de ser conservada em uma quantidade $\Delta E = Mc^2$. Pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg, $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$, o méson trocado poderia existir durante um tempo Δt (sem que a quebra de conservação de energia pudesse ser observada), onde

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{Mc^2}. \quad (1.5)$$

Durante este tempo o méson trocado poderia viajar no máximo uma distância

$$R = c\Delta t \simeq \frac{\hbar}{Mc}, \quad (1.6)$$

já que a velocidade da luz, c , é a velocidade limite. Então, se a força nuclear puder ser descrita pela troca de mésons, que existiriam “virtualmente” durante um tempo permitido pelo Princípio da Incerteza, o alcance da força nuclear seria de aproximadamente \hbar/Mc . Experimentalmente encontra-se que o alcance da força nuclear é $R \simeq 10^{-13}$ cm, o que dá uma estimativa da massa do méson

$$M \simeq \frac{\hbar}{Rc} \simeq 0,35 \times 10^{-24} \text{g} \simeq 200 \text{ MeV}, \quad (1.7)$$

onde $1 \text{ MeV}/c^2 = 1,782 \times 10^{-27} \text{ g}$ (e, para abreviar, geralmente omite-se o c^2).

Em 1936 Anderson [AN36] observou uma partícula com massa aproximadamente igual à prevista por Yukawa em um feixe de raios cósmicos, utilizando uma câmara de bolhas. Essas partículas foram investigadas durante os dez anos seguintes mas, já que a interação delas com núcleons era extremamente fraca, elas não poderiam ser o méson de Yukawa. Esse enigma foi resolvido por Lattes, Powell e Ochialini [La47]; eles descobriram que existiam dois tipos de mésons, chamados de mésons μ e mésons π . O méson π interage fortemente com núcleons mas possui um tempo de vida muito curto e decai em um méson μ , que é a partícula identificada anteriormente por Anderson. O *múion*, como hoje é conhecido o méson- μ , possui um tempo de vida mais longo e não interage fortemente com outras partículas. O múion não participa da descrição das forças nucleares e é classificado na categoria dos *léptons*, a qual pertence o elétron.

É o méson π , conhecido por *píon*, a partícula prevista por Yukawa. Os píons foram produzidos no laboratório pela primeira vez por Gardner e Lattes em 1948 [GL48], utilizando partículas α de 340 MeV do sincrociclotron da Universidade da Califórnia.

1.3 - Os Píons

O píon existe em três estados de carga, π^+ , π^0 , e π^- . Os píons π^+ e π^- possuem a mesma massa, 139,57 MeV, e a mesma vida média, $\tau = 2,6 \times 10^{-8} \text{ s}$, e decaem quase exclusivamente pelo processo

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad (1.8a)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (1.8b)$$

onde μ^+ , μ^- são os múions positivo e negativo, ν_μ é o *neutrino muônico* e $\bar{\nu}_\mu$, o *antineutrino* correspondente. Apenas uma fração $1,2 \times 10^{-4}$ dos píons decai por

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e, \quad (1.9a)$$

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, \quad (1.9b)$$

resultando em um pósitron (elétron) e um *neutrino (antineutrino) eletrônico*. Os neutrinos são partículas de carga zero e massa muito pequena ou nula. Os neutrinos eletrônicos têm um papel relevante na teoria do decaimento- β , como veremos no capítulo 7.

A fração de decaimento em um determinado modo é conhecida por *taxa de ramificação*.

Os píons carregados também podem decair em

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma, \quad (1.10a)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \gamma, \quad (1.10b)$$

com taxa de ramificação também de $1,2 \times 10^{-4}$.

A massa do pión neutro, π^0 , é 135,0 MeV, o que é 4,6 MeV menor que a massa dos pions carregados. O π^0 decai na forma

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma, \quad (1.11)$$

com taxa de ramificação de 98,8%, por

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma, \quad (1.12)$$

com taxa de ramificação de 1,2%, e por outros processos muito menos prováveis. A vida-média total do π^0 é de $(8,4 \pm 0,6) \times 10^{-17}$ s.

As formas mais simples de se produzir pions envolvem colisões entre núcleons:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0, \quad (1.13a)$$

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+, \quad (1.13b)$$

$$p + n \rightarrow p + p + \pi^-, \quad (1.13c)$$

$$p + n \rightarrow p + n + \pi^0. \quad (1.13d)$$

As propriedades dos pions também podem ser investigadas pelas reações induzidas pelos mesmos, como espalhamento elástico

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \quad (1.14a)$$

espalhamento inelástico,

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \pi^- + p, \quad (1.14b)$$

ou reação com troca de carga

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (1.14c)$$

Da análise de reações de pions com núcleons e dêuterons pôde-se concluir que o spin dos pions é zero. Portanto, os pions são bósons, e obedecem à *estatística de Bose*.

1.4 - Antipartículas

Para cada partícula existente na natureza há uma antipartícula correspondente, com a mesma massa e carga de módulo igual e de sinal contrário ao da partícula. Esse conceito se estabeleceu ao final da década de 20 com o desenvolvimento da mecânica quântica relativista por Dirac e teve sua primeira confirmação experimental com a descoberta do pósitron (antielectron) por Anderson [An32] em 1932. A antipartícula do

próton (*antipróton*) foi detectada por Segrè e colaboradores em 1955 [CS55], utilizando o bévatron de 6 GeV da Universidade da Califórnia.

Os primeiros estudos da reação $\bar{p} + p$, onde \bar{p} simboliza o antipróton, mostraram que na grande maioria dos casos essa reação leva à aniquilação do par $p\bar{p}$ com a produção de píons, mas em 0,3% dos casos ela é capaz de formar o par $n + \bar{n}$, onde \bar{n} é a antipartícula do nêutron, ou *antinêutron*. Foi dessa forma que, em 1956, Cork e colaboradores [CL56], detectaram o antinêutron pela primeira vez, usando antiprótons provenientes de um alvo de berílio bombardeado com prótons de 6,2 GeV.

Antiprótons e antinêutrons constituem os *antinúcleons*. Os módulos de todas as grandezas associadas a uma partícula são idênticos para a antipartícula correspondente mas, como teremos oportunidade de explicitar adiante, existem, além da carga, outras grandezas para as quais os valores para partícula e antipartícula têm sinais opostos.

Os mésons π^+ e π^- são antipartículas uma da outra. Nesse caso não é relevante definir qual é a partícula e qual é a antipartícula, pois os mésons não são parte da constituição normal da matéria. No caso do π^0 , partícula e antipartícula coincidem, pois carga e momento magnético são nulos.

1.5 - A Paridade

Considere o estado quântico de uma partícula, $\Psi(\mathbf{r})$. A paridade desse estado está relacionada às propriedades da função de onda $\Psi(\mathbf{r})$ sob uma inversão de coordenadas

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Se

$$\Psi(-\mathbf{r}) = +\Psi(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

dizemos que o estado possui paridade positiva, e se

$$\Psi(-\mathbf{r}) = -\Psi(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

dizemos que o estado possui paridade negativa. Uma inversão de coordenadas em torno da origem é representada em mecânica quântica pelo operador P , onde

$$P\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}). \quad (1.18)$$

P é chamado de *operador paridade*. Os autovalores de P são ± 1 (já que $P^2 = 1$):

$$P\Psi(\mathbf{r}) = \pm\Psi(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Se o potencial a que está sujeito o conjunto de partículas for uma função par, isto é, $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$, o operador paridade comuta com o Hamiltoniano e a paridade mantém-se constante no tempo, ou seja, ela é *conservada*.

Da análise de um sistema de duas partículas 1 e 2, que não interagem, descrito pela função de onda produto

$$\Psi(\mathbf{r}_1) \Psi(\mathbf{r}_2) \quad (1.20)$$

obtemos que a paridade do sistema é o produto das paridades de cada partícula, ou seja, a paridade é um número quântico multiplicativo.

Além da paridade relacionada a seu estado espacial, uma partícula também pode ter uma paridade intrínseca. Nesse caso a paridade total é igual ao produto das paridades intrínseca e espacial. Em processos nos quais nenhuma partícula é criada ou destruída, as paridades intrínsecas das partículas são irrelevantes. Em reações nas quais partículas são criadas ou destruídas, as paridades intrínsecas das partículas devem ser incluídas para se determinar as regras de seleção, devido à conservação da paridade. Quando uma função de onda $\Psi(\mathbf{r})$ descreve uma partícula com momento angular orbital $\hbar l$, movendo-se em um potencial esfericamente simétrico, podemos separá-la no produto $\Psi = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ e, nesse caso, $\Psi(-\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\pi - \theta, \phi) = R(r)(-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$. Isso mostra que a paridade da parte orbital é dada por $(-1)^l$. Se a partícula possuir paridade intrínseca positiva, a paridade total será $(-1)^l$. Se a partícula possuir paridade intrínseca negativa, a paridade total será $(-1)^{l+1}$.

Da análise de reações de píons e núcleons, conclui-se que a paridade intrínseca dos primeiros é $P_\pi = -1$ e que, para os núcleons, $P_n = P_p = +1$.

1.6 - Isospin e Número Bariônico

As partículas elementares tendem a ocorrer em grupos de aproximadamente a mesma massa, mas com cargas diferentes. A massa do nêutron, por exemplo, é próxima à do próton, e a massa de um pión neutro, π^0 , é aproximadamente igual a dos píons carregados, π^+ e π^- . Em 1932 Heisenberg [He32] sugeriu que o próton e o nêutron poderiam ser vistos como dois *estados de carga* de uma mesma partícula que ele chamou de *núcleon*.

Na teoria do espectro atômico, um estado que possui *multiplicidade* $(2s + 1)$, possui spin $s^{(*)}$. Um exemplo disso é o efeito Zeeman que é a separação energética de $(2s + 1)$ estados de um átomo em um campo magnético. O spin s é identificado com o momento angular do sistema, e operadores para as componentes desse momento angular, s_x , s_y , s_z , podem ser definidos. As regras de comutação quânticas dizem que

$$[s_x, s_y] = i\hbar s_z, \quad [s_y, s_z] = i\hbar s_x, \quad [s_z, s_x] = i\hbar s_y. \quad (1.21)$$

(*) O spin é um vetor de módulo $\hbar\sqrt{s(s+1)}$. É comum, no entanto, referir-se ao *número quântico de spin* s simplesmente como *spin* s . Isso também é válido para os momentos angulares orbital e total.

O núcleon possui, em relação à sua carga, multiplicidade $2 = (2 \times \frac{1}{2} + 1)$ e, por analogia com a teoria do espectro atômico, designamos uma quantidade chamada *isospin*, $t = \frac{1}{2}$, para obtermos a multiplicidade $2t + 1 = 2$. No entanto, o isospin não pode ser identificado como um momento angular, e não possui nenhuma relação com as propriedades espaciais do núcleon. Podemos, porém, introduzir um espaço de isospin, ou espaço de carga, onde o isospin pode ser tratado como um conjunto de 3 componentes t_x, t_y, t_z , satisfazendo as mesmas regras de comutação do spin,

$$[t_x, t_y] = i\hbar t_z, \quad [t_y, t_z] = i\hbar t_x, \quad [t_z, t_x] = i\hbar t_y. \quad (1.22)$$

Desse modo, podemos lidar com o isospin da mesma maneira que lidamos com o momento angular. Assim, como o quadrado do spin, \mathbf{s}^2 , possui autovalores $s(s + 1)$, o quadrado do isospin, \mathbf{t}^2 , possui autovalores $t(t + 1)$. A adição do isospin de várias partículas pode ser tratado com o modelo vetorial de adição, utilizado na teoria de espectros atômicos. Como exemplo, quando dois spins $\frac{1}{2}$ se somam, o spin total pode ser 0 ou 1. Este é o caso da soma dos isospins de dois núcleons (cada qual possui spin $\frac{1}{2}$).

Os $(2s + 1)$ estados de um sistema com spin s são denotados pelos $(2s + 1)$ valores distintos da componente z de \mathbf{s} (em unidades de \hbar):

$$s_z = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s. \quad (1.23)$$

Analogamente, os $(2t + 1)$ estados de um sistema com isospin t são denotados pelos $(2t + 1)$ valores distintos da componente t_z ,

$$t_z = -t, -t + 1, \dots, t - 1, t. \quad (1.24)$$

A direção do terceiro eixo no espaço de carga é escolhido de modo que $t_z = +\frac{1}{2}$ para o próton e $t_z = -\frac{1}{2}$ para o nêutron.

O pión possui três estados de carga, logo ele possui isospin $t = 1$; os três píons formam um *multiplete* de carga, ou multiplete de isospin, com multiplicidade $2t + 1 = 3$. O estado $t_z = +1$ é atribuído ao π^+ , $t_z = 0$ ao π^0 e $t_z = -1$ ao π^- . Esta atribuição está ligada à convenção que se adotou para os núcleons e é necessária à validade da equação (1.25) que se segue.

O módulo do isospin é uma quantidade invariante em um sistema regido pela interação forte. Nas interações eletromagnéticas essa quantidade não é necessariamente conservada e teremos a oportunidade de constatar adiante que essa é a única lei de conservação que tem comportamento diferente em relação a essas duas forças.

O número de núcleons antes e depois de uma reação é sempre o mesmo [veja, por exemplo, as equações (1.13) e (1.14)]. Isto nos sugere a introdução de uma nova quantidade, B , chamada de *número bariônico*, que é sempre conservado nas reações. Atribuímos ao próton e ao nêutron o número bariônico $B = 1$, e ao antipróton e

antinêutron $B = -1$. Aos píons atribuímos $B = 0$ (do mesmo modo que para os elétrons, neutrinos, múons e fótons). Desse modo, a conservação do número bariônico é estendida a todas as reações. Esse princípio tem seu correspondente para os *léptons* (família de partículas leves a qual pertence o elétron), sendo ali definido um *número leptônico* que se conserva nas reações.

Da definição de isospin e de número bariônico, podemos escrever a carga q , em unidades de e , como

$$q = t_z + \frac{B}{2}. \quad (1.25)$$

Como a antipartícula de uma partícula de carga q e número bariônico B , possui carga $-q$, e número bariônico $-B$, ela também deve possuir uma terceira componente do isospin $-t_z$, onde t_z é a componente- z do isospin da partícula correspondente.

1.7 - Momentos Magnéticos dos Núcleons

Uma partícula carregada girando em torno de um eixo pode ser visualizada como um sistema equivalente a uma pequena espira onde circula uma corrente elétrica. A essa corrente está associado um momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ que se relaciona ao momento angular \mathbf{L} da partícula através de $\boldsymbol{\mu} = e\mathbf{L}/2mc$, sendo e a carga e m a massa da partícula. É comum escrever-se

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{eg_L}{2mc} \mathbf{L}, \quad (1.26)$$

onde é introduzido o fator g_L , chamado *fator g orbital*, igual a 1 para prótons e zero para nêutrons.

No entanto, uma partícula pode, como já vimos, possuir um momento angular intrínseco \mathbf{s} . Desse modo, é razoável admitir-se que a essa partícula possa também estar associado um momento magnético intrínseco

$$\boldsymbol{\mu}_S = \frac{eg_S}{2mc} \mathbf{s}, \quad (1.27)$$

onde a constante g_S , *fator g de spin*, não deve ter necessariamente o mesmo valor de g_L adequado às variáveis clássicas, já que \mathbf{s} e $\boldsymbol{\mu}_S$ têm origem puramente quântica. De fato, de um tratamento relativístico da Mecânica Quântica usando a equação de Dirac emerge o valor $g_S = 2$ para partículas carregadas de spin 1/2.

A constante universal (usando m como a massa do próton)

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc} = 5.05 \times 10^{-27} \frac{\text{joule.m}^2}{\text{weber}} \quad (1.28)$$

é conhecida como *magneton nuclear*, por analogia com o magneton de Bohr definido para o elétron. O magneton nuclear é utilizado como unidade de medida de momentos magnéticos e convém notar que, devido à presença da massa do próton no denominador, seu valor é cerca de 1800 vezes menor que seu equivalente eletrônico. Com ele, (1.26) e (1.27) podem ser reescritas como

$$\boldsymbol{\mu}_L = \mu_N g_L \frac{\mathbf{L}}{\hbar}, \quad (1.29a)$$

$$\boldsymbol{\mu}_S = \mu_N g_S \frac{\mathbf{S}}{\hbar}. \quad (1.29b)$$

A previsão $g_S = 2$ mencionada no parágrafo anterior funciona muito bem para o elétron. Para o próton e o nêutron os valores encontrados experimentalmente são:

$$g_S = 5,5856 \quad (\text{próton}), \quad (1.30a)$$

$$g_S = -3,8262 \quad (\text{nêutron}), \quad (1.30b)$$

quando os valores esperados seriam 2 e 0. A discrepância acima pode ser explicada em parte devido à *dissociação virtual* dos núcleons. Como já afirmamos, o Princípio da Incerteza permite que um núcleon emita e reabsorva um pión durante um intervalo de tempo $\Delta t \sim \hbar/m_\pi c^2$, conforme descreve os diagramas da figura 1.2. Um próton pode se dissociar em um nêutron e um π^+ . O π^+ possui spin zero e não tem momento magnético intrínseco, mas ele pode contribuir para o momento magnético do próton devido à sua órbita em torno do nêutron. Supondo que este processo conserve momento angular e paridade, pode-se mostrar que a órbita do π^+ é no mesmo sentido que o spin intrínseco inicial do próton. O efeito da produção virtual de um π^+ é, portanto, o de aumentar o momento magnético do próton, como é observado experimentalmente.

Da mesma forma o π^- contribui para o momento magnético do nêutron. Existe uma pequena contribuição ao momento magnético devido ao spin e à órbita do próton, mas a maior contribuição deve-se à órbita do π^- , por causa da sua pequena massa; o momento magnético orbital depende do inverso da massa da carga orbitante (eq. 1.28), e $m_\pi \ll m_p$. A contribuição é negativa por causa da carga do π^- e porque ele orbita no mesmo sentido do spin do nêutron. Assim, esperamos que o momento magnético intrínseco do nêutron seja menor que zero, como é verificado experimentalmente. Esta análise é apenas qualitativa. Uma explicação mais exata dos momentos magnéticos dos núcleons é ainda objeto de estudos teóricos.

O antipróton, sendo uma partícula de carga negativa, tem momento de dipolo magnético em sentido oposto ao momento angular e, para ele, $g_L = -1$. Os valores dados por (1.30) também têm sinal oposto para as antipartículas. Assim, o momento magnético do antipróton aponta em sentido oposto ao do spin e o do antinêutron aponta no mesmo sentido do spin.

Fig. 1.2 - Dissociação virtual dos núcleons, dando origem ao momento magnético anômalo.

1.8 - Estranheza e Hipercarga

Em 1947, partículas com propriedades diferentes das existentes até então foram encontradas nos raios cósmicos e mais tarde (1953) observadas no laboratório. Nas câmaras de nuvens, onde suas trajetórias eram detectadas e fotografadas, elas apareciam como um par de traços em forma de V, deixando entender que duas partículas eram criadas simultaneamente. Essas *partículas estranhas* ou *partículas-V*, como eram inicialmente conhecidas, constituem dois grupos distintos. Um deles consiste em partículas mais pesadas que os núcleons e que decaem neles, e são chamadas de *híperons*. Os símbolos Λ , Σ , Ξ e Ω são utilizados para os vários híperons. Como decai em um núcleon, um híperon é um bárion e possui número bariônico 1. Eles também possuem spin $\frac{1}{2}$, e são férmions. O outro grupo de partículas estranhas são bósons com spin 0 e são chamados de mésons-K, ou káons.

Reações típicas envolvendo partículas estranhas são

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad (1.31a)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0, \quad (1.31b)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-, \quad (1.31c)$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0, \quad (1.31d)$$

Fig. 1.3 - Exemplo de uma colisão nêutron-próton. Quando a proximidade dos núcleons os coloca dentro do alcance da interação forte, um ou mais píons são trocados entre eles.

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad (1.31e)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p, \quad (1.31f)$$

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0. \quad (1.31g)$$

O *tempo de interação* para as reações envolvendo núcleons e píons é obtido aproximadamente pelo tempo em que um pión, com velocidade próxima à da luz, viaja uma distância igual ao alcance das forças nucleares. Esse tempo é cerca de $r/c \simeq 10^{-23}$ s, que é muito menor que o tempo de meia-vida do Λ^0 ($\tau = 2,5 \times 10^{-10}$ s), ou de outras partículas estranhas. Por outro lado, encontra-se experimentalmente que a taxa com que lambdas, ou outras partículas estranhas, são produzidas é consistente com um tempo de interação da ordem de 10^{-23} s. Para explicar o fato de que partículas estranhas fossem produzidas tão rapidamente porém decaíssem tão lentamente, Pais [Pa52] sugeriu que as interações fortes (que são as interações entre núcleons, ou entre píons e núcleons) são as responsáveis pela produção de partículas estranhas. As reações em que somente uma partícula estranha participa, como no seu decaimento, aconteceriam através da interação fraca, similar ao decaimento β ou ao decaimento de múons ou píons carregados.

Em 1953, Gell-Mann [Ge53] e Nishijima [NN53] mostraram que a produção de partículas estranhas poderia ser explicada introduzindo um novo número quântico chamado *estranheza*, e postulando que a estranheza era conservada em interações fortes. Assim, por exemplo, duas partículas estranhas, mas de estranhezas opostas, poderiam ser produzidas através da interação forte em uma colisão entre um pión e um núcleon. A estranheza, porém, não é conservada no decaimento de uma partícula estranha, e estes decaimentos são atribuídos à interação fraca.

A estranheza, S , o número bariônico, B , a componente-z do isospin, t_z , e a carga, q , podem ser relacionados por

$$q = t_z + \frac{B}{2} + \frac{S}{2}. \quad (1.32)$$

Por exemplo, para $S = 0$, a equação acima se reduz à relação (1.25) para núcleons e píons. Logo, os núcleons e píons possuem estranheza $S = 0$.

A partícula Λ^0 forma um *singlete* de isospin, isto é, $t = 0$; as partículas Σ^+ , Σ^0 e Σ^- formam um *triplete* de isospin, $t = 1$; os cáons formam *dubletos* de isospin, $t = \frac{1}{2}$; e as partículas Ξ^0 e Ξ^- também formam um dublete de isospin com $t = \frac{1}{2}$. Os números quânticos das partículas que interagem fortemente estão resumidos na tabela 1.1. As antipartículas têm o mesmo símbolo das partículas mas com uma barra acima.

O número quântico

$$Y = B + S \quad (1.33)$$

é conhecido por *hipercarga* e (1.32) pode ser escrita na forma

$$q = t_z + \frac{Y}{2}. \quad (1.34)$$

Como o número bariônico é conservado em todas as reações, a conservação ou não da estranheza é equivalente à conservação ou não da hipercarga, que depende, por sua vez, da conservação da carga e da componente-z do isospin. Todas essas quantidades se conservam nas reações regidas pelas interações forte e eletromagnética.

1.9 - Estrutura dos Hádrons

Os bárions (núcleons e híperons) e os mésons, cujas propriedades descrevemos nas seções anteriores, são as partículas que obedecem à interação forte. Elas recebem, por essa característica, o nome genérico de *hádrons*, cujos principais atributos expusemos na tabela 1.1.

O grande número de hádrons e a aparente complexidade de sua distribuição levaram muitos investigadores a questionar se essas partículas não seriam estruturas complexas compostas pela união de entidades mais simples. Modelos foram propostos para essas estruturas e, após algumas tentativas não bem sucedidas, um modelo criado independentemente por M. Gell-Mann [Ge64] e G. Zweig [Zw64], em 1964, acabou se impondo e conquistando credibilidade com o correr dos anos. A inspiração para esse modelo veio das simetrias observadas quando se plotam os mésons e bárions em gráficos de estranheza versus a componente t_3 do isospin, como mostrado na figura 1.4. O tipo de simetria observada nas figuras é característica do grupo denominado SU_3 , onde três elementos básicos podem gerar singletos (os mésons η' e ϕ), octetos (os demais oito mésons das figuras de cima e os oito bárions de spin $1/2$) e decupletos (os bárions de spin $3/2$). Esses três elementos básicos, concebidos inicialmente apenas como entidades matemáticas capazes de gerar as necessárias simetrias, acabaram adquirindo *status* de verdadeiras partículas elementares, as quais Gell-Mann deu o nome de *quarks*. Para compor as propriedades dos hádrons, esses três quarks, apresentados nos *sabores up*, *down* e *strange* (para cima, para baixo e estranho) devem ter as características mostradas na tabela 1.2.

	B	S	t	t_z	s	$m(\text{MeV}/c^2)$
p	+1	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	938,272
n	+1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	939,566
\bar{p}	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	938,272
\bar{n}	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	939,565
Λ	+1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	1115,68
Σ^+	+1	-1	1	+1	$\frac{1}{2}$	1189,4
Σ^0	+1	-1	1	0	$\frac{1}{2}$	1192,6
Σ^-	+1	-1	1	-1	$\frac{1}{2}$	1197,4
$\bar{\Lambda}$	-1	+1	0	0	$\frac{1}{2}$	1115,68
$\bar{\Sigma}^+$	-1	+1	1	-1	$\frac{1}{2}$	1189,4
$\bar{\Sigma}^0$	-1	+1	1	0	$\frac{1}{2}$	1192,6
$\bar{\Sigma}^-$	-1	+1	1	+1	$\frac{1}{2}$	1197,4
Ξ^0	+1	-2	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1315
Ξ^-	+1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1321
$\bar{\Xi}^0$	-1	+2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1315
$\bar{\Xi}^-$	-1	+2	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1321
Ω^-	+1	-3	0	0	$\frac{3}{2}$	1672
π^0	0	0	1	0	0	134,976
π^+	0	0	1	+1	0	139,567
π^-	0	0	1	-1	0	139,567
K^+	0	+1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	493,7
K^-	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	493,7
K^0	0	+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	497,7
\bar{K}^0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	497,7

Tab. 1.1 - Atributos das partículas que interagem fortemente. Os bárions são as partículas com número bariônico $B \neq 0$; os mésons têm $B = 0$. S é a estranheza, t o spin isotópico e t_z a projeção do mesmo; s é o spin da partícula e m sua massa. Os bárions têm paridade intrínseca positiva, os mésons, negativa.

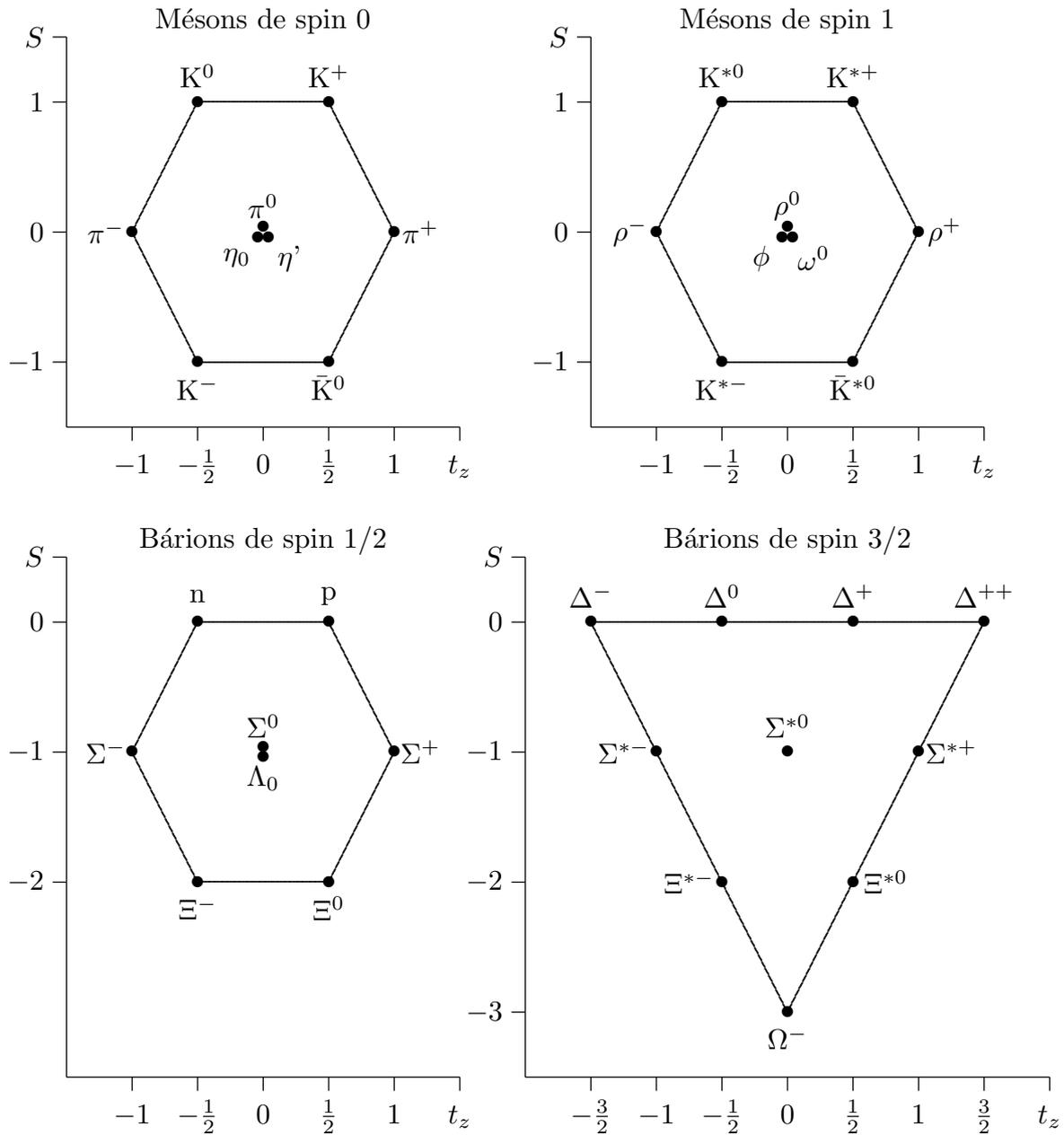


Fig. 1.4 - Gráficos de estranheza contra componente t_3 do isospin para os diversos tipos de hádrons.

O fato mais marcante é que, pela primeira vez, é admitida a existência de partículas com carga fracionária (uma fração da carga do elétron). Podemos dessa forma construir um núcleon pela composição de três quarks:

$$\begin{aligned} \text{próton} &\rightarrow uud \\ \text{nêutron} &\rightarrow udd \end{aligned}$$

e é natural atribuir aos quarks um número bariônico $B = 1/3$.

Sabor	Carga	Spin	Estranheza
<i>up</i>	+2/3	1/2	0
<i>down</i>	-1/3	1/2	0
<i>strange</i>	-1/3	1/2	-1

Tab. 1.2 - Números quânticos característicos dos quarks

Os píons, por sua vez, são obtidos pela junção de um quark e um antiquark:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow u\bar{d}, \\ \pi^0 &\rightarrow d\bar{d}, \\ \pi^- &\rightarrow d\bar{u},\end{aligned}$$

onde as propriedades de antipartícula para os quarks são obtidas da maneira convencional.

Para a reprodução dos outros bárions e mésons, os quarks estranhos têm que entrar em cena e um híperon como o Σ^0 , por exemplo, tem a constituição

$$\Sigma^0 \rightarrow uds$$

e um méson K^+

$$K^+ \rightarrow u\bar{s}.$$

É conveniente mencionar nesse ponto que uma certa combinação de quarks não conduz necessariamente a uma única partícula. No caso da combinação uds acima, temos ainda a possibilidade de construir com ela o híperon

$$\Sigma^{*0} \rightarrow uds.$$

A razão disso é que, além de outros números quânticos que serão discutidos adiante, uma combinação de três férmions pode dar lugar a partículas com spins diferentes. Se considerarmos nulo o momento orbital total dos quarks, o que é verdade para todas as partículas que discutimos, o spin total de três quarks pode ser 1/2 ou 3/2. O híperon Σ^0 se enquadra no primeiro caso e o híperon Σ^{*0} no último.

Uma primeira dificuldade na teoria aparece quando se examinam as partículas

$$\begin{aligned}\Delta^{++} &\rightarrow uuu, \\ \Delta^- &\rightarrow ddd, \\ \Omega^- &\rightarrow sss.\end{aligned}$$

Como os três quarks de cada caso são férmions com $l = 0$, é imediato que pelo menos dois deles estariam no mesmo estado quântico, o que viola o Princípio de Pauli. Para contornar essa dificuldade, criou-se um novo número quântico, a *cor*: os quarks, além dos sabores *up*, *down* ou *strange*, teriam uma cor, vermelho (R), verde (G) ou azul (B), ou uma “*anticor*”, \bar{R} , \bar{G} ou \bar{B} . É claro que, assim como o sabor, a cor nada tem a ver com a noção usual que temos dessa propriedade. A introdução desse novo número quântico resolve a dificuldade acima, pois agora um bárion como o Δ^{++} se escreve

$$\Delta^{++} \rightarrow u_R u_G u_B,$$

eliminando os problemas com o Princípio de Pauli. O acréscimo de três novos números quânticos expande em demasia as possibilidades de construção de hádrons mas uma nova regra entra em jogo, limitando as possibilidades de combinação de cores: *todos os possíveis estados dos hádrons são incolores*, onde incolor nesse contexto significa ausência de cor, ou cor branca. O branco é obtido quando, na confecção de um bárion, se associam três quarks, um de cada cor, e nesse sentido funciona a analogia com as cores comuns, pois a associação de vermelho, verde e azul dá o branco. Na construção de um méson, a ausência de cor se dá pela combinação de uma cor e sua respectiva anticor. Outra forma de apresentar essa propriedade é entendendo a anticor como a cor complementar. Nesse caso, a analogia com as cores usuais também funciona e o par cor-anticor resulta também no branco.

O conceito de cor não se presta unicamente para resolver o problema da obediência ao Princípio de Pauli. Ela tem um papel fundamental no processo de interação dos quarks. A teoria aceita para essa interação estabelece que as forças entre quarks se dão pela troca de partículas sem massa, de spin 1, chamadas *glúons*. Esses glúons carregam sempre uma cor e uma anticor diferente e no processo de mediação eles trocam as cores dos quarks participantes; exemplo ilustrativo é visto na figura 1.5; vê-se também nessa figura que os próprios glúons podem emitir glúons.

Os campos em torno dos hádrons onde forças de troca se dão pelo porte de cores se denominam de *campos de cores* e os glúons, as partículas portadoras, passam a ser as partículas de campo da interação forte. Nessa tarefa eles vêm substituir os píons que, dentro do novo esquema, são partículas compostas. O fato de os glúons portarem cores e poderem se multiplicar torna o estudo dos campos de cor (Cromodinâmica Quântica) particularmente complexo.

Apesar do sucesso do *modelo de Quarks*, novas dificuldades apareceram e, em 1970, com a finalidade de explicar certos tempos de decaimento em desacordo com as previsões do modelo, S. L. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani [G170] propuseram a existência de um quarto quark cujo sabor recebeu a designação de *charme* (c). Esse quark c tem uma carga de $+2/3$; ele tem estranheza zero mas possui um novo número quântico, o charme C , com um valor atribuído de $C = 1$. A proposição do quark c recebeu uma confirmação experimental indireta em 1974, quando dois laboratórios independentes detectaram uma nova partícula, denominada Ψ pelo grupo do acelerador linear de Stanford (SLAC) e J pela equipe do Laboratório Nacional de Brookhaven. A partícula J/Ψ , como é comumente designada, pôde ser interpretada como um estado $c\bar{c}$, denominado *charmônio*,

Fig. 1.5 - (a) Forças entre quarks mediadas pela troca de glúons. (b) Diagrama mostrando como um quark B se transforma em um quark G, e vice-versa, pela troca de um gluon $G\bar{B}$.

por analogia com o positrônio $e\bar{e}$. A existência de partículas com charme introduz uma complicação nas simetrias da figura 1.4: um eixo com o novo número quântico é acrescentado e as novas simetrias devem ser buscadas em um espaço tri-dimensional.

Em 1977, uma série de ressonâncias em reações próton-próton de 10 GeV apontaram para a existência de um novo méson, que recebeu a denominação de Υ e que levou à proposição de um novo quark. Esse quark, b (de *bottom* ou *beauty*), tem carga igual a $-1/3$ e um novo número quântico, a *beleza* B^* . O quark b tem $B^* = -1$.

Razões teóricas levam a se acreditar que os quarks existem aos pares e isso nos conduz a um sexto sabor, que corresponde ao quark t (de *top* ou *true*), com carga $+2/3$. Esse quark foi identificado em experiências realizadas no Fermilab em 1993 [Ab94].

A proposição dos quarks, com suas cores e sabores, criou um esquema com o qual um grande número de fatos experimentais pôde ser explicado. Mas, a existência real dos quarks como partículas ainda não se pode colocar fora de qualquer dúvida. Embora feixes de elétrons de alta energia tenham detectado uma estrutura interna nos núcleons com todas as características dos quarks, nunca se pôde arrancar um quark de um hádron e se estudar suas propriedades isoladamente. Foram inclusive propostos modelos que eliminam essa possibilidade, *confinando* os quarks permanentemente aos hádrons. Uma consequência é que suas massas não podem ser determinadas diretamente, por dependerem das energias de ligação também desconhecidas.

De qualquer forma, essas dificuldades não chegam a abalar o prestígio do modelo e, com a aceitação do mesmo, há uma redução substancial no número das partículas elementares, isto é, as partículas pontuais sem uma estrutura interna. Essas seriam os quarks, os léptons e os bósons de campo. Um quadro de propriedades dessas partículas é apresentado na tabela 1.3.

Quarks	carga	spin	estranheza	charme	beleza	verdade
u	+2/3	1/2	0	0	0	0
d	-1/3	1/2	0	0	0	0
s	-1/3	1/2	-1	0	0	0
c	+2/3	1/2	0	1	0	0
b	-1/3	1/2	0	0	-1	0
t	+2/3	1/2	0	0	0	1

Léptons	massa(MeV/c ²)	carga	spin	meia-vida(s)
e ⁻	0,511	-1	1/2	∞
ν _e	0	0	1/2	∞
μ ⁻	105,66	-1	1/2	2,2 × 10 ⁻⁶
ν _μ	0	0	1/2	∞
τ ⁻	1784	-1	1/2	3,4 × 10 ⁻¹³
ν _τ	0	0	1/2	∞

Partículas de campo	massa (GeV/c ²)	carga	spin
Fóton	0	0	1
W ⁺	81	1	1
Z ⁰	93	0	1
Glúons	0	0	1
Gráviton	0	0	2

Tab. 1.3 - Propriedades das partículas elementares - no quadro de cima cada quark pode se apresentar em três cores, R, G e B. Só aparece na tabela um representante do par partícula-antipartícula.

Sugestões para leitura

- C. A. Bertulani, “A Matéria Superaquecida e Supercomprimida”, *Ciência Hoje*, nº 46, 1988.
- L. M. Brown, “Hideki Yukawa and the Meson Theory”, *Physics Today*, dezembro de 1986, pg. 55.
- L. M. Brown, M. Dresden e L. Hoddeson,, “From Pion to Quarks: Particle Physics in the 1950’s”, *Physics Today*, novembro de 1988, pg. 57.
- H. Teixeira Coelho e M. R. Robilotta, “Forças Nucleares”, *Ciência Hoje*, nº 63, 1990, pg. 22.
- H. Georgi, “Flavor SU(3) Symmetries in Particle Physics”, *Physics Today*, abril de 1988, pg. 29.
- G. E. Brown e M. Rho, “The Structure of the Nucleon”, *Physics Today*, fevereiro de 1983, pg. 3.
- J.A. Mignaco e R. Cintra Shellard, “A Matéria Indivisível”, *Ciência Hoje*, nº 14, 1984.
- O papel dos quarks na estrutura de partículas elementares é bem descrito em Y. Nambu, “Quarks”, World Scientific, Singapura, 1981.
- Uma noção básica de física de partículas é encontrada no livro de R. Eisberg e R. Resnick, “Física Quântica”, Editora Campus.
- Uma excelente introdução à Física de Hádrons é encontrada no livro de F. Halzen e A.D. Martin, “Quarks & Leptons”, John Wiley, Singapore, 1984.

Exercícios

- 1 - a) Utilizando a expressão relativista para a relação momento-energia, calcule o comprimento de onda de *de Broglie*, $\lambda = h/p$, para prótons de energia cinética 500 keV e 900 MeV. b) Repita o cálculo utilizando a expressão não-relativista para o momento. c) Repita (a) e (b) para elétrons com as mesmas energias.
- 2 - Em que energia cinética o próton possui velocidade igual à metade da velocidade da luz? Compare com o resultado para o elétron.
- 3 - Utilizando expressões relativistas para a conservação de momento e energia, mostre que um próton deve ter energia maior do que 5,6 GeV para produzir um par próton-antipróton em uma colisão com outro próton em repouso.
- 4 - Usando a relação massa-energia, calcule a energia cinética liberada nos decaimentos (1.8).
- 5 - Calcule as energias limiares para as seguintes reações no sistema do laboratório, supondo que o próton inicial esteja em repouso:



6 - Quais dos seguintes processos são absolutamente proibidos?

$$\begin{array}{ll}
 (a) & \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p \\
 (b) & p + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \\
 (c) & n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\
 (d) & n \rightarrow p + e^+ + \nu_e \\
 (e) & \gamma + p \rightarrow \bar{n} + \pi^+
 \end{array}$$

7 - Verifique a expressão (1.25) para p , n , \bar{p} , \bar{n} , π^+ , π^- , π^0 .

8 - Supondo que os píons virtuais da figura 1.2 descrevam um semi-círculo de diâmetro igual a 1 fm, calcule, usando a equação (1.26), a contribuição extra para o momento de dipolo magnético do próton e do nêutron causada pela emissão de um píon virtual (note que este é um modelo bastante rudimentar para explicar o momento magnético anômalo dos prótons e dos nêutrons).

9 - Quais dos seguintes processos não pode ocorrer através da interação forte?

$$\begin{array}{ll}
 (a) & K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 \\
 (b) & K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n \\
 (c) & \Xi^0 + n \rightarrow \Sigma^- + p \\
 (d) & \Lambda^0 + n \rightarrow \Sigma^- + p \\
 (e) & K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + n \\
 (f) & \pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Sigma^0
 \end{array}$$

10 - Construa uma reação envolvendo o próton e os káons (K^+ , K^- e K^0), que obedeça às leis de conservação e que leve à criação do híperon Ω^- .

11 - Use a tabela 1.1 e mostre que o decaimento do híperon Ω^- não pode ter qualquer modo regido pela interação forte (que conserva S) que não viole alguma lei de conservação. Por exemplo, o decaimento $\Omega^- \rightarrow p + 2K^- + \bar{K}^0$ conserva S mas é energeticamente proibido. A partícula Ω^- , de fato, só decai por intermédio da força fraca (que não conserva S), através dos modos $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$ (69%), $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ (23%) e $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$ (8%).

12 - Utilizando a relação (1.25), mostre que os quarks *up* e *down* são membros de um doublet de isospin $t_z = \pm 1/2$.

2 - O SISTEMA DE DOIS NÚCLEONS

2.1 - Introdução

O átomo de hidrogênio foi o primeiro sistema de duas partículas estudado em Mecânica Quântica. A primeira teoria para o átomo de hidrogênio, desenvolvida por Niels Bohr em 1913 [Bo13], foi refinada por Schrödinger e Heisenberg [He25, Sc26] com a introdução da teoria ondulatória em 1926. O problema do átomo de hidrogênio é simplificado pelo fato de ser bem conhecida a força coulombiana de interação do próton com o elétron. A solução desse problema quântico resultou na determinação de um conjunto de estados de energia permitidos para o sistema, o que possibilitou uma comparação direta com os valores medidos das transições eletromagnéticas entre esses estados. Desde então tem havido um grande progresso no entendimento do átomo de hidrogênio e de átomos com muitos elétrons e, atualmente, são muito pequenas as discrepâncias entre a teoria quântica e os dados experimentais.

Os sistemas nucleares são muito mais complexos do que os sistemas atômicos. Já o caso mais simples, o sistema de dois núcleons, tem seu tratamento teórico dificultado pelo fato de não ser completamente conhecida a forma da força que atua entre eles. Apesar disso, a teoria quântica tem sido utilizada com sucesso nas diversas áreas da física nuclear. Neste capítulo será feita uma aplicação simples ao sistema de dois núcleons e será apresentada uma expressão para o potencial de interação dos mesmos.

Existem dois conjuntos de dados experimentais para o sistema de dois núcleons. Um primeiro conjunto provém do estudo do único sistema ligado desse gênero, o dêuteron, composto de um próton e um nêutron. Ao contrário do átomo de hidrogênio, o dêuteron só possui um estado ligado, o estado fundamental. Desse modo, as teorias da interação nêutron-próton no dêuteron só podem ser testadas comparando suas previsões com os valores experimentais da energia, momento angular, paridade, momento de dipolo magnético e momento de quadrupolo elétrico do estado fundamental do dêuteron.

O segundo conjunto de dados experimentais vem do estudo do espalhamento núcleon-núcleon. Como é difícil produzir um feixe de nêutrons para esse objetivo (os nêutrons possuem carga zero e não podem ser acelerados por meio de um campo elétrico), as experiências são limitadas a colisões entre prótons e ao espalhamento próton-dêuteron, esse último fornecendo indiretamente informações sobre a interação próton-nêutron. A comparação teórica com os dados experimentais nessas colisões e com as propriedades do estado fundamental do dêuteron têm sido útil para a descrição semi-fenomenológica das forças de interação entre dois núcleons, como veremos adiante.

2.2 - Dados Experimentais sobre o Dêuteron

(a) *Energia de ligação* . O dêuteron tem uma massa menor do que a soma das massas

do próton e do nêutron. Essa “massa ausente” é emitida em forma de radiação gama quando o próton e o nêutron se unem para formar o dêuteron e deve ser restituída em forma de energia se quisermos separar novamente o dêuteron em seus constituintes. Essa *energia de ligação* existe, com diferentes valores, para qualquer núcleo e é, de fato, uma propriedade geral imposta pela Teoria da Relatividade a todo sistema ligado.

Um método indireto para se medir a energia de ligação do dêuteron é através da medida da massa atômica do mesmo, comparando o resultado com a soma da massa do próton e do nêutron. Um outro método, mais direto, consiste na medição experimental da energia do raio gama emitido quando o nêutron e o próton se combinam para formar um estado ligado (captura n-p). Também se pode medir o processo inverso, i.e., a energia do raio gama necessária para quebrar a ligação entre o próton e o nêutron (foto-desintegração). Os dois primeiros métodos fornecem os resultados mais precisos e deles se pode extrair o valor para a energia de ligação do dêuteron

$$E_B = (2,22464 \pm 0.00005) \text{ MeV.} \quad (2.1)$$

- (b) *Momento angular e paridade.* O momento angular do dêuteron foi determinado como sendo $J = 1$, resultado proveniente de métodos óticos, de radiofrequência, e de microondas.

A paridade de um estado nuclear não pode ser medida diretamente. Obtém-se seu valor analisando a conservação de paridade de certas desintegrações nucleares. Esses estudos mostram que uma função de onda com paridade par fornece a descrição teórica mais adequada para o dêuteron.

- (c) *Momento de dipolo magnético.*^(*) O momento magnético do dêuteron pode ser obtido em função do momento magnético do próton utilizando-se o método de ressonância magnética em um feixe molecular. Esse método faz a medição da frequência, ou energia quântica, necessária para redirecionar em 180° o momento magnético de um núcleo em um campo magnético periódico. O resultado das medições dá o valor

$$\mu_d/\mu_p = 0.30701218 \pm 0.00000002,$$

ou seja,

$$\mu_d = (0.857393 \pm 0.000001)\mu_N, \quad (2.2)$$

onde μ_N é o magneton nuclear.

- (d) *Momento de quadrupolo elétrico.* Rabi e colaboradores [Ra33] mostraram que o dêuteron também possui um momento de quadrupolo elétrico que o faz parecer um

^(*) Um estudo mais detalhado dos momentos multipolares será feito no capítulo 3.

esferóide prolato ao longo do seu eixo de spin, com os valores médios quadráticos das coordenadas z e r do próton obedecendo à razão

$$\frac{\langle z^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle} = \frac{1,14}{3}, \quad (2.3)$$

em vez de $1/3$, como deveria ser para uma distribuição de carga esfericamente simétrica, já que $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$. O momento de quadrupolo que corresponde a essa deformação tem o valor experimental $Q_d = 0,00282$ barns ($1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$).

- (e) *O raio do dêuteron.* Hofstadter e colaboradores [Ho62] fizeram medidas precisas do raio do próton, dêuteron, e de núcleos complexos, através do espalhamento de elétrons. Eles obtiveram o valor de $2,1 \text{ fm}$ para o raio médio quadrático do dêuteron. A mesma medição para o próton resultou no valor de $0,8 \text{ fm}$.

2.3 - Uma Teoria Simples para o Dêuteron

Na descrição quântica do dêuteron, é razoável supor que o estado fundamental é um estado S, i.e., um estado com momento angular nulo. Com $l = 0$, Ψ é esfericamente simétrica e o momento angular do núcleo é inteiramente devido ao spin. Como os spins do próton e do nêutron são $1/2$, e o do dêuteron é 1 , isto significa que os spins são paralelos. Em tal situação, os momentos magnéticos deveriam se somar:

$$\mu_d \cong \mu_p + \mu_n = 0,8797 \mu_N.$$

Comparando esse resultado com o valor dado em (2.2) vemos que a diferença é de $0,0223 \mu_N$. Logo, o valor do momento magnético do dêuteron concorda quase que perfeitamente com a soma dos momentos do próton e do nêutron. A razão para a pequena diferença será discutida adiante.

À semelhança do átomo de hidrogênio, a equação de Schrödinger para o dêuteron pode ser resolvida reduzindo o problema de dois corpos a um problema de 1 corpo que tem a massa reduzida do sistema e cuja distância à origem é a distância entre os dois corpos. No sistema do centro de massa do dêuteron, a equação de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{r}) \Psi = E \Psi, \quad (2.4)$$

onde

$$M = \frac{M_n M_p}{M_n + M_p}$$

é a massa reduzida, e $V(\mathbf{r})$ é o potencial que descreve a força entre o próton (massa M_p) e o nêutron (massa M_n). A diferença para o átomo de hidrogênio é que o potencial nuclear $V(\mathbf{r})$ não é completamente conhecido mas, para uma primeira abordagem, vamos

admitir uma forma bem simples para esse potencial. Vamos supor inicialmente que V seja esfericamente simétrico, isto é, que dependa apenas da distância de separação entre o próton e o nêutron, ou seja, $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Nesse caso, as funções de onda Ψ , soluções de (2.4), podem ser separadas nas partes radial e angular,

$$\Psi = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.5)$$

onde os índices l e m admitem os valores

$$l = 0, 1, 2, \dots,$$

$$m = -l, -l + 1, \dots, l.$$

$Y_l^m(\theta, \phi)$ é a função harmônica esférica e u_l a solução da equação radial

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2Mr^2} \right] u_l = 0. \quad (2.6)$$

O último termo dentro dos colchetes é conhecido como *potencial centrífugo*. Quando $V(r)$ é negativo (potencial atrativo), o potencial centrífugo atua no sentido de diminuir a atração, tornando o sistema menos ligado. Nessas circunstâncias é fácil ver que quando $l = 0$ temos a situação onde o sistema é mais ligado, ou seja, a energia é a mais baixa possível; o estado fundamental de um sistema esfericamente simétrico é sempre um estado de $l = 0$.

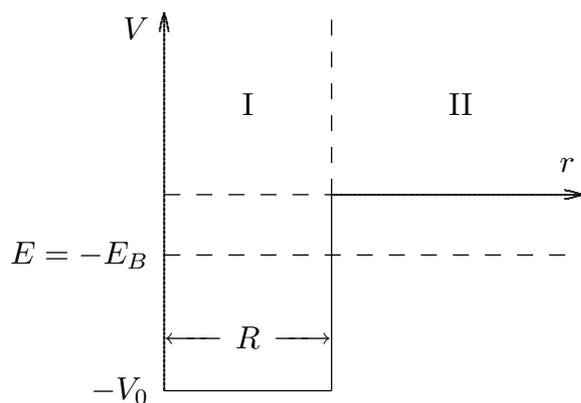


Fig. 2.1 -Poço de potencial proposto para o dêuteron.

O potencial mais simples que podemos imaginar para o dêuteron é o “poço quadrado tridimensional” indicado na figura 2.1 . O raio R e a profundidade V_0 devem ser ajustados de modo a melhor reproduzir os dados experimentais. Na região I, para $l = 0$, temos, abandonando o índice de u , que

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} [V_0 - E_B]u = 0, \quad (2.7)$$

onde se usou o fato experimental conhecido $E = -E_B = -2.225$ MeV, sendo portanto V_0 e E_B números positivos. A solução dessa equação, que satisfaz a condição de contorno $u = 0$ em $r = 0$, é

$$u_I = A \operatorname{sen} Kr, \quad (2.8)$$

onde A é uma constante de normalização e

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(V_0 - E_B)}. \quad (2.9)$$

Na região II a equação radial assume a forma

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2M}{\hbar^2} E_B u = 0, \quad (2.10)$$

cuja solução, que satisfaz a condição de contorno $u = 0$ em $r = \infty$, é

$$u_{II} = B e^{-kr}, \quad (2.11)$$

onde B é uma constante de normalização e

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M E_B}. \quad (2.12)$$

As soluções (2.8) e (2.11) devem ser igualadas em $r = R$ de modo que tanto a função u , como sua derivada sejam contínuas nesse ponto. Essa é a única maneira de satisfazer a equação de Schrödinger também nesse ponto. Essas condições implicam em

$$AK \cos(KR) = -k B e^{-kR}, \quad (2.13a)$$

$$A \operatorname{sen}(KR) = B e^{-kR}. \quad (2.13b)$$

Dividindo (2.13a) por (2.13b), encontramos

$$K \cotg(KR) = -k. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) relaciona implicitamente a energia de ligação E_B à largura R e profundidade V_0 do potencial. Como E_B é medido experimentalmente, a equação (2.14) nos dá uma relação entre os parâmetros desconhecidos V_0 e R . Se usarmos $R = 2.1$ fm, que é o “raio eletromagnético” do dêuteron obtido das medidas de Hofstadter com o espalhamento de elétrons (seção 3.2), a equação (2.14) para V_0 pode ser resolvida numérica ou graficamente (figura 2.2a), resultando um valor $V_0 \cong 34$ MeV para a profundidade do poço do dêuteron. Se, inversamente, usarmos esse valor de V_0 em (2.14) poderemos ver (figura 2.2b) que ela não tem solução para nenhum outro valor de E_B . O que se conclui é que não há estados excitados ligados para $l = 0$. Para $l > 0$, o potencial centrífugo inibe ainda mais a formação de um estado ligado. O potencial nuclear teria que ser mais profundo para que a ligação não fosse quebrada pela força centrífuga.

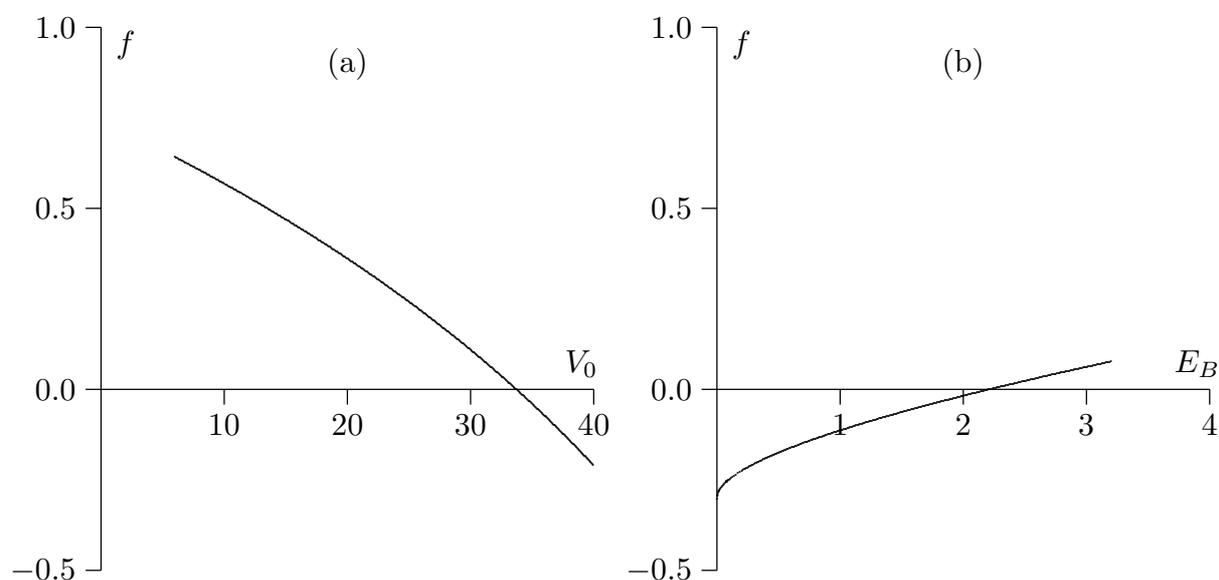


Fig. 2.2 - Uma das maneiras de resolver uma equação como (2.14) é encontrar graficamente as raízes da função $f = K \cotg(KR) + k$. Em (a) f é plotada em função da profundidade V_0 do potencial do dêuteron, usando $E_B = 2.225$ MeV. A função tem uma raiz para $V_0 \cong 34$ MeV. Usando esse valor de V_0 em (b), a mesma função é plotada contra a energia de ligação E_B , mostrando que não há outra solução além da anterior.

Um fato experimental importante é o de que o momento angular total do dêuteron é $J = 1$. Se a proposta de um estado $l = 0$ é correta, fica determinado um spin intrínseco $S = 1$ para o dêuteron (o próton e o nêutron com vetores de spin paralelos). Na terminologia espectroscópica, isso é conhecido por um *estado tripleto*, que é denotado por 3S_1 , onde o índice superior é igual a $2S + 1$ e o inferior é o valor de J . Se as forças nucleares fossem independentes do spin, deveríamos observar um *estado singleto*, 1S_0 , com a mesma energia, e esse não é o caso. De fato, nenhum estado com $J = 0$ para o dêuteron foi encontrado experimentalmente, o que indica ser a força nêutron-próton

mais forte quando os spins são paralelos do que quando são antiparalelos. Essas forças serão estudadas em detalhe na seção 2.5.

2.4 - A Função de Onda do Dêuteron

Os fatos de que o momento de quadrupolo do dêuteron é diferente de zero e de que o momento magnético do dêuteron não é a soma dos momentos magnéticos do próton e do nêutron indicam que o dêuteron não pode ter uma função de onda esfericamente simétrica como no caso de um estado 3S_1 .

Podemos averiguar a natureza da função de onda do estado fundamental do dêuteron usando a informação de que ele é um estado de paridade definida, com $J = 1$. Os estados possíveis de momento angular orbital l e spin S são

$$\begin{aligned} l = 0 \quad S = 1 &\rightarrow {}^3S_1, \\ l = 1 \quad S = 0 &\rightarrow {}^1P_1, \\ l = 1 \quad S = 1 &\rightarrow {}^3P_1, \\ l = 2 \quad S = 1 &\rightarrow {}^3D_1. \end{aligned}$$

Logo, a função de onda do dêuteron só pode ser uma combinação dos estados 3S_1 e 3D_1 (paridade par) ou uma combinação dos estados 1P_1 e 3P_1 (paridade ímpar). Devemos verificar qual dessas combinações aproxima-se mais da função de onda do estado fundamental do dêuteron com as propriedades observadas.

Para construirmos essa função de onda será necessário considerar que ela é auto-função do momento angular total do sistema, que é obtido pela adição (acoplamento) de três vetores, os spins de cada núcleon e o momento angular orbital. Convém nesse ponto recordar como se obtém a função de onda resultante do acoplamento de dois momentos angulares.

Imaginemos inicialmente dois sistemas independentes, sem interação, onde as funções de onda $|j_1 m_1\rangle$ e $|j_2 m_2\rangle$ descrevam o comportamento de cada sistema, de momentos angulares respectivos \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_2 . Nesse caso,

$$\begin{aligned} j_1^2 |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle, \\ j_{1z} |j_1 m_1\rangle &= m_1 |j_1 m_1\rangle, \end{aligned} \tag{2.15}$$

com expressões idênticas para o *ket* 2.

Pouca coisa se alterará se englobarmos os *kets* $|j_1 m_1\rangle$ e $|j_2 m_2\rangle$ em um único *ket*

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \tag{2.16}$$

para o qual valem as relações

$$j_1^2 | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle = j_1(j_1 + 1) | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle, \quad (2.17)$$

... etc.

Coloquemos agora os dois sistemas em interação. \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_2 não serão mais constantes de movimento, mas precessarão em torno do momento angular total $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$. Os valores possíveis de j serão as quantidades $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2$. As projeções m_1 e m_2 não serão mais bons números quânticos, mas sim a projeção $m = m_1 + m_2$, de modo que a função de onda adequada à descrição do sistema pode ser representada pelo *ket* $| j_1 j_2 j m \rangle$.

A função de onda (2.16), que descreve conjuntamente os dois sistemas sem interação, não é, naturalmente, mais válida no caso presente; mas, ela forma uma base na qual a função de onda com interação pode ser expandida. Assim,

$$| j_1 j_2 j m \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m \rangle | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle \quad (2.18)$$

é a expansão proposta, onde a soma sobre m_1 e m_2 se reduz, na verdade, a uma única soma, se levarmos em consideração que $m_1 + m_2 = m$. As quantidades

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m \rangle \quad (2.19)$$

são denominadas *coeficientes de Clebsh-Gordan* e podem ser obtidas a partir das relações da álgebra de momentos angulares. Os coeficientes são também encontrados em tabelas onde os dados de entrada são os seis valores que aparecem em (2.19).

Voltando ao problema do dêuteron, calculemos inicialmente o acoplamento dos spins do próton e do nêutron. A expansão (2.18) se escreve, nesse caso,

$$| \frac{1}{2} \frac{1}{2} S m_S \rangle = \sum_{m_S^{(1)}, m_S^{(2)}} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_S^{(1)} m_S^{(2)} | S m_S \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_S^{(1)} m_S^{(2)} \rangle \quad (2.20)$$

ou, na notação mais usual, empregando a função de spin χ ,

$$\chi_S^{m_S} = \sum_{m_S^{(1)}, m_S^{(2)}} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_S^{(1)} m_S^{(2)} | S m_S \rangle \chi_{\frac{1}{2}}^{m_S^{(1)}}(1) \chi_{\frac{1}{2}}^{m_S^{(2)}}(2), \quad (2.21)$$

onde o índice superior $m_S^{(i)}$ admite os valores $\pm 1/2$. Se definirmos

$$\chi_{1/2}^{+1/2} = \alpha \quad \text{e} \quad \chi_{1/2}^{-1/2} = \beta,$$

o estado tripleto ($S=1$) se escreve

$$\chi_1^1 = \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 1 1 \rangle \alpha(1)\alpha(2) = \alpha(1)\alpha(2), \quad (2.22a)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^0 &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 1 0 \rangle \alpha(1)\beta(2) + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | 1 0 \rangle \alpha(2)\beta(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)], \end{aligned} \quad (2.22b)$$

$$\chi_1^{-1} = \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 1 -1 \rangle \beta(1)\beta(2) = \beta(1)\beta(2) \quad (2.22c)$$

e o estado singleto ($S = 0$),

$$\begin{aligned} \chi_0^0 &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | 0 0 \rangle \alpha(1)\beta(2) \\ &\quad + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | 0 0 \rangle \beta(1)\alpha(2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

As funções de onda de spin, $\chi_S^{m_S}$, devem ser acopladas agora às auto-funções do momento angular orbital, Y_l^m , para se obter a parte angular \mathcal{Y} da função de onda total. Baseados em (2.18) podemos escrever

$$\mathcal{Y}_{lS}^M = \sum_{m_S, m_l} \langle l S m_l m_S | J M \rangle \chi_S^{m_S} Y_l^{m_l}. \quad (2.24)$$

O estado fundamental do dêuteron tem $J = 1$. Assim, somente os quatro estados calculados abaixo serão considerados:

$${}^3S_1 : J = 1, M = 1, l = 0 \text{ e } S = 1$$

$$\mathcal{Y}_{011}^1 = \langle 0 1 0 1 | 1 1 \rangle Y_0^0 \alpha(1)\alpha(2) = Y_0^0 \alpha(1)\alpha(2); \quad (2.25)$$

$${}^3D_1 : J = 1, M = 1, l = 2 \text{ e } S = 1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{211}^1 &= \sum_{m_S} \langle 2 1 (1 - m_S) m_S | 1 1 \rangle Y_2^{1-m_S} \chi_1^{m_S} \\ &= \sqrt{3/5} Y_2^2 \beta(1)\beta(2) - \sqrt{3/10} Y_2^1 \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) \\ &\quad + \beta(1)\alpha(2)] + \sqrt{1/10} Y_2^0 \alpha(1)\alpha(2); \end{aligned} \quad (2.26)$$

${}^1P_1 : J = 1, M = 1, l = 1$ e $S = 0$

$$\mathcal{Y}_{101}^1 = \langle 1010 | 11 \rangle Y_1^1 \chi_0^0 = Y_1^1 \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)]; \quad (2.27)$$

${}^3P_1 : J = 1, M = 1, l = 1$ e $S = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{111}^1 &= \sum_{m_S} \langle 11(1 - m_S)m_S | 11 \rangle Y_1^{1-m_S} \chi_1^{m_S} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^1 \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)] - \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^0 \alpha(1)\beta(2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para o dêuteron, fazamos o índice 1 em α e β corresponder ao próton e o índice 2 ao nêutron. Podemos escrever a função de onda $\Psi_{lS}^M(\mathbf{r}, \chi)$ para os quatro casos discutidos em termos das funções de onda radiais $u_l(r)$, onde l refere-se ao momento angular orbital

$${}^3S_1 : \Psi_S \equiv \Psi_{011}^1 = \frac{u_0(r)}{r} \mathcal{Y}_{011}^1 = \frac{u_0(r)}{r} Y_0^0 \chi_1^1; \quad (2.29)$$

$${}^3D_1 : \Psi_D \equiv \Psi_{211}^1 = \frac{u_2(r)}{r} \mathcal{Y}_{211}^1 = \frac{u_2(r)}{r} \left[\sqrt{\frac{3}{5}} Y_2^2 \chi_1^{-1} - \sqrt{\frac{3}{10}} Y_2^1 \chi_1^0 + \sqrt{\frac{1}{10}} Y_2^0 \chi_1^1 \right] \quad (2.30)$$

$${}^1P_1 : \Psi_{1P} \equiv \Psi_{101}^1 = \frac{u_1(r)}{r} \mathcal{Y}_{101}^1 = \frac{u_1(r)}{r} Y_1^1 \chi_0^0; \quad (2.31)$$

$${}^3P_1 : \Psi_{3P} \equiv \Psi_{111}^1 = \frac{u_1(r)}{r} \mathcal{Y}_{111}^1 = \frac{u_1(r)}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^1 \chi_1^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^0 \chi_1^1 \right]. \quad (2.32)$$

Se notarmos que no sistema do centro de massa o momento angular orbital associado ao próton é metade do momento orbital relativo, $\mathbf{l}_p = \frac{1}{2}\mathbf{l}$, a componente-z do momento magnético do dêuteron é, de acordo com (1.29),

$$\mu_z = \frac{1}{2}l_z + g_p S_p^z + g_n S_n^z, \quad (2.33)$$

em unidades de μ_N , o magneton nuclear. g_p e g_n são dados, respectivamente, por (1.30a) e (1.30b).

O momento magnético^(*) do dêuteron é definido por

$$\mu = \langle \Psi_{lSJ}^J | \mu_z | \Psi_{lSJ}^J \rangle = \langle \frac{u_l}{r} \mathcal{Y}_{lSJ}^J | \mu_z | \frac{u_l}{r} \mathcal{Y}_{lSJ}^J \rangle. \quad (2.34)$$

Se levarmos em consideração que (em unidades de \hbar)

$$l_z Y_l^m = m Y_l^m,$$

e que

$$\begin{aligned} S_p^z \chi_1^1 &= \frac{1}{2} \chi_1^1 & S_n^z \chi_1^1 &= \frac{1}{2} \chi_1^1 \\ S_p^z \chi_1^0 &= \frac{1}{2} \chi_0^0 & S_n^z \chi_1^0 &= -\frac{1}{2} \chi_0^0 \\ S_p^z \chi_1^{-1} &= -\frac{1}{2} \chi_1^{-1} & S_n^z \chi_1^{-1} &= -\frac{1}{2} \chi_1^{-1} \\ S_p^z \chi_0^0 &= \frac{1}{2} \chi_1^0 & S_n^z \chi_0^0 &= -\frac{1}{2} \chi_1^0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

vamos obter que

$$\begin{aligned} \mu_z \mathcal{Y}_{011}^1 &= \frac{1}{2} (g_p + g_n) \mathcal{Y}_{011}^1 = \frac{1}{2} (g_p + g_n) Y_0^0 \chi_1^1; \\ \mu_z \mathcal{Y}_{211}^1 &= \sqrt{\frac{3}{5}} \left(1 - \frac{g_p + g_n}{2}\right) Y_2^2 \chi_1^{-1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{10}} Y_2^1 [\chi_1^0 + (g_p - g_n) \chi_0^0] + \sqrt{\frac{1}{10}} \frac{g_p + g_n}{2} Y_2^0 \chi_1^1; \\ \mu_z \mathcal{Y}_{101}^1 &= \frac{1}{2} Y_1^1 [\chi_0^0 + (g_p - g_n) \chi_1^0]; \\ \mu_z \mathcal{Y}_{111}^1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [Y_1^1 \chi_1^0 + g_p (Y_1^1 \chi_0^0 - Y_1^0 \chi_1^1) - g_n (Y_1^1 \chi_0^0 + Y_1^0 \chi_1^1)]. \end{aligned}$$

Utilizando a ortonormalidade dos Y_l^m e dos $\chi_S^{m_s}$, obtemos os valores esperados

$${}^3S_1 : \langle \Psi_{011}^1 | \mu_z | \Psi_{011}^1 \rangle = \frac{g_p + g_n}{2} \int_0^\infty u_0^2(r) dr = \frac{g_p + g_n}{2} = 0,88\mu_N; \quad (2.36)$$

$${}^3D_1 : \langle \Psi_{211}^1 | \mu_z | \Psi_{211}^1 \rangle = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(g_p + g_n)\right] \int_0^\infty u_2^2(r) dr = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(g_p + g_n) = 0,31\mu_N; \quad (2.37)$$

$${}^1P_1 : \langle \Psi_{101}^1 | \mu_z | \Psi_{101}^1 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty u_1^2(r) dr = 0,5\mu_N; \quad (2.38)$$

(*) Nas seções 3.5 e 3.6 se faz uma introdução formal dessa grandeza.

$${}^3P_1 : \langle \Psi_{111}^1 | \mu_z | \Psi_{111}^1 \rangle = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(g_p + g_n) \right] \int_0^\infty u_1^2(r) dr = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(g_p + g_n) = 0,69\mu_N. \quad (2.39)$$

O valor experimental do momento magnético do dêuteron é $0,8573 \mu_N$, diferente de todos os valores encontrados acima. Logo, o dêuteron não pode se encontrar exclusivamente em qualquer dos estados mencionados anteriormente. A fim de que o momento magnético seja igual ao valor experimental, somos forçados a concluir que o estado fundamental do dêuteron deve ser uma mistura desses estados. Desse modo, construímos as possíveis misturas de estados de mesma paridade

$$\Psi = C_S \Psi_S + C_D \Psi_D \quad (2.40a)$$

ou

$$\Psi = C_{1P} \Psi_{1P} + C_{3P} \Psi_{3P}, \quad (2.40b)$$

e a condição de normalização $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ dá

$$C_S^2 + C_D^2 = 1 \quad (2.41a)$$

ou

$$C_{1P}^2 + C_{3P}^2 = 1. \quad (2.41b)$$

Das equações (2.36), (2.37) e (2.40a) tiramos

$$\langle \Psi | \mu_z | \Psi \rangle = \frac{1}{2}(g_p + g_n)C_S^2 + \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(g_p + g_n) \right] C_D^2 = (0,88C_S^2 + 0,31C_D^2)\mu_N. \quad (2.42)$$

Se igualarmos $\langle \Psi | \mu_z | \Psi \rangle$ ao valor experimental $0,85573 \mu_N$, obteremos $C_S^2 = 0,96$ e $C_D^2 = 0,04$. Por outro lado, uma mistura de estados 1P_1 e 3P_1 não poderá nos levar ao valor experimental de μ já que em ambos os estados o momento magnético é menor que μ_d . Devemos concluir que o estado fundamental do dêuteron é basicamente (96%) um estado 3S_1 , com uma pequena (4%) contribuição do estado 3D_1 . Desse modo, a função de onda do dêuteron pode ser escrita como

$$\Psi_d = C_S \frac{u_0}{r} \mathcal{Y}_{011}^1 + C_D \frac{u_2}{r} \mathcal{Y}_{211}^1. \quad (2.43)$$

Resultado idêntico poderia ser obtido pela análise do momento de quadrupolo elétrico.

2.5 - A Interação Núcleon-Núcleon

Nesta seção vamos examinar de que modo o conhecimento que já temos do dêuteron pode nos ajudar na proposição de uma forma para a interação núcleon-núcleon. Devemos, de início, considerar que um conjunto de fatos experimentais indica ser a força nuclear independente da carga dos núcleons. Isso significa que a força entre um nêutron e um próton tem a mesma forma da força entre dois nêutrons e também, se subtrairmos a parte coulombiana, entre dois prótons. Também significa que existe uma grandeza física envolvida para a qual há uma lei de conservação. Tal grandeza é o isospin T , definido na seção 1.5. Em termos da componente T_z dessa grandeza podemos expressar as três possibilidades de se construir um sistema de dois núcleons: o *di-nêutron* com $T_z = -1$, o *di-próton* com $T_z = +1$, e o dêuteron com $T_z = 0$. T_z denota a soma das componentes- z do isospin de cada núcleon. Como só temos dois núcleons, T não pode ser maior do que 1. Logo, para ambos os sistemas, di-nêutron e di-próton, T tem que ser igual a 1. Para o dêuteron com $T_z = 0$, T pode ser 0 ou 1.

A função de onda do sistema de dois núcleons pode ser escrita como o produto de uma função espacial, uma função de spin e uma de isospin:

$$\Psi = \psi_{\text{esp}} \chi_s^{m_s} \phi_T^{T_z}. \quad (2.44)$$

Denotemos por π um estado do próton e por ν um estado de nêutron, de modo que $\pi(1)\nu(2)$ significa que o primeiro núcleon é um próton e o segundo é um nêutron. Podemos construir a parte de isospin $\phi_{T_z}^T$ da função de onda do sistema de dois núcleons de forma análoga ao caso do spin, como indica a tabela 2.1.

Função de onda de isospin	T	T_z	simetria por troca de isospin
$\phi_1^1 = \pi(1)\pi(2)$	1	1	Tripleto (simétrica)
$\phi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) + \pi(2)\nu(1)]$	1	0	
$\phi_1^{-1} = \nu(1)\nu(2)$	1	-1	
$\phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) - \pi(2)\nu(1)]$	0	0	Singleto (antissimétrica)

Tab. 2.1 - Funções de onda de isospin para o sistema de dois núcleons.

Os estados ϕ_1^1 (di-próton) e ϕ_1^{-1} (di-nêutron) constituem, juntamente com ϕ_1^0 , um tripleto no espaço de isospin. A questão que se põe agora é se algum membro desse tripleto pode fazer parte de um estado ligado de duas partículas. Para mostrar que isso

não é possível, examinemos o estado fundamental do dêuteron. Vimos que esse estado tem $J = 1$, $S = 1$ e $l = 0$. Esse último valor indica que a parte espacial é simétrica e $S = 1$ corresponde a uma parte de spin também simétrica. Como Ψ em (2.44) deve ser antissimétrica $\phi_T^{T_z}$ deve também ser antissimétrica para o estado fundamental do dêuteron e a função de onda de isospin desse estado só pode ser ϕ_0^0 . A função ϕ_1^0 é, portanto, a função de onda de isospin de um estado excitado do dêuteron mas sabemos experimentalmente que esse tipo de estado não é ligado. Como a força nuclear não depende da carga, a inexistência de um estado ligado para ϕ_1^0 deve ser estendida a ϕ_1^1 e ϕ_1^{-1} . Esse último resultado mostra que *não existem os sistemas ligados próton-próton ou nêutron-nêutron*. Isso concorda com as observações experimentais.

Mas, como podem os estados com $T = 1$ e $T = 0$ corresponder à energias diferentes se as forças nucleares são independentes da carga (isospin)? Isso se deve à dependência da força nuclear com o spin. A cada um dos grupos de estados de isospin está associada uma orientação diferente dos spins, de modo que a cada grupo correspondem energias diferentes. A dependência da força nuclear com o spin tem conexão com o fato de não haver estado ligado do dêuteron outro que o estado fundamental (triplete de spin). A força entre próton e nêutron quando eles têm spins antiparalelos (singleto) é menor do que quando eles têm spins paralelos (triplete), não sendo forte o suficiente para formar um estado ligado. Veremos no capítulo 9 que essa força tem um valor apenas um pouco abaixo do necessário para produzir um estado ligado.

Vamos então analisar a possível forma de um potencial dependente de spin. Esse potencial será escrito como função do operador $\boldsymbol{\sigma}$, cujas componentes são as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

que satisfazem a $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e que é relacionado de uma maneira simples ao operador de spin, $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Ao analisarmos as possíveis formas do potencial devemos ter em mente que ele deve ser invariante para rotações e reflexões do sistema de coordenadas, isto é, ser um escalar. A partir dos operadores $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ de cada núcleon, podemos construir a função escalar

$$V_\sigma(r) \cdot (A + B \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (2.46)$$

que, no caso particular que examinaremos, $A = B = \frac{1}{2}$, assume a forma

$$V_\sigma(r) \cdot \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \equiv V_\sigma(r)P_\sigma, \quad (2.47)$$

onde $V_\sigma(r)$ descreve a dependência radial e o operador $P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ possui o valor esperado $+1$ para o estado triplete e -1 para o estado singleto. Isso pode ser mostrado partindo do vetor $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$. Como $S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$, então

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(-\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 4S^2/\hbar^2); \quad (2.48)$$

os autovalores $\hbar^2 S(S+1)$ de S^2 são $+2\hbar^2$ para o estado tripleto ($S = 1$) e 0 para o estado singlete. Os autovalores de $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ são iguais a 3, de modo que os autovalores de $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ são iguais a $+1$ para o estado tripleto e -3 para o estado singlete, resultando nos valores esperados de P_σ preditos acima.

P_σ é conhecido como *potencial de Bartlett* ou *potencial de troca de spin* já que, se utilizarmos para o spin as funções equivalentes às dadas pela tabela 2.1, obteremos que a operação de troca dos spins é equivalente à multiplicação por um fator $+1$ para o estado tripleto e um fator -1 para o estado singlete.

Além do spin, é comum se considerar a inclusão de outras grandezas no potencial nuclear. Assim, por exemplo, pode-se admitir que a força nuclear dependa da paridade da função de onda que descreve o conjunto das duas partículas. Um modo de expressar essa dependência é pela adição ao potencial do termo

$$V_r(r)P_r, \quad (2.49)$$

denominado *potencial de Majorana*, que contém o operador P_r que troca as coordenadas espaciais das duas partículas. Os auto-valores de P_r são $+1$ e -1 , se a função de onda for par ou ímpar, respectivamente.

A independência de carga da força nuclear está ligada à invariância do Hamiltoniano sob rotação no espaço de isospin. Baseados nisso, podemos também acrescentar ao potencial um termo criado a partir dos isospins \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 . De forma análoga a (2.47), definimos a quantidade

$$V_t(r) \cdot \frac{1}{2}(1 + \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2) \equiv V_t(r)P_t, \quad (2.50)$$

onde o operador P_t troca os isospins das duas partículas. A antissimetria da função de onda total faz com que P_t não seja independente de P_σ e P_r , existindo a relação

$$P_t = -P_\sigma P_r, \quad (2.51)$$

que pode ser facilmente verificada pela aplicação de ambos os membros à (2.44). O operador $P_\sigma P_r$ é conhecido como *potencial de Heisenberg*.

Reunindo os termos apresentados até agora, podemos escrever a expressão que representa a parte central do potencial núcleon-núcleon:

$$V_c(r) = V_W(r) + V_r(r)P_r + V_\sigma(r)P_\sigma + V_t(r)P_t, \quad (2.52)$$

onde foi incluída a parcela V_W dependente unicamente de r , normalmente referida como *potencial de Wigner*.

A expressão (2.52) não pode, no entanto, ser a forma final da interação núcleon-núcleon. A existência de outros termos se torna necessária para explicar determinados resultados experimentais. Um deles é a inexistência de um valor bem definido para

l , representada pela perturbação de um estado $l = 2$ causada no estado fundamental $l = 0$ do dêuteron (eq. 2.43). Isso nos obriga a pensar em um potencial de interação núcleon-núcleon não central, da forma $V(\mathbf{r})$, já que um potencial central $V(r)$ conserva momento angular e tem l como um bom número quântico.

É comum descrever a atuação dessas forças não centrais por uma função dos ângulos entre os vetores dos spins do nêutron e do próton e do vetor radial \mathbf{r} que os separa. Tal potencial é conhecido como *potencial tensor*. As funções candidatas a representar o potencial tensor devem ter como primeiro requisito serem escalares. Assim, produtos do tipo $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ e $(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ devem ser rejeitados por serem pseudo-escalares, isto é, trocaram de sinal em uma reflexão do sistema de coordenadas. Potências dessas expressões são inúteis por termos, por exemplo, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})^2 = 1$ e $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})^3 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$. Nessa situação, a forma mais simples do escalar que procuramos é $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})$ (*). Essa expressão é normalmente modificada para atender à condição de que a média sobre todas as direções seja nula. Sabendo-se que a média de $(\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})(\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})$ é $\frac{1}{3}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, define-se o potencial tensor como

$$V_{12}(r)S_{12} \quad \text{com} \quad S_{12} = 3 \left(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (2.53)$$

Para o estado singlete $\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_2$, donde se segue que $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = -\sigma_1^2 = -3$, e que $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}) = -(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})^2 = -1$. Logo, para o estado singlete, $S_{12} = 0$, ou seja, a força tensorial é nula. Esse é um resultado esperado, já que não há direção preferencial para o estado singlete.

Os termos propostos até agora são todos característicos de um *potencial local*, expressão que designa um potencial que fica perfeitamente definido para cada ponto \mathbf{r} do espaço. Potenciais dependentes de momento são, por outro lado, exemplo de potenciais que não dependem unicamente do ponto e são ditos *não-locais*. Entre esses, é comum a inclusão no potencial nuclear de um termo da forma

$$V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = V_{LS}(r)\frac{\hbar}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2), \quad (2.54)$$

linear em \mathbf{p} , conhecido por interação *spin-órbita*. Essa interação pode ser observada, por exemplo, no espalhamento de prótons polarizados por um núcleo alvo sem spin (figura 2.3). Dependendo em que direção o próton viaja, o spin \mathbf{S} e o momento angular \mathbf{L} podem estar paralelos ou antiparalelos. Desse modo, o termo $V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ no potencial, possui o produto escalar ora positivo, ora negativo. Isso leva a uma assimetria na seção de choque de espalhamento.

Reunindo os termos para o potencial nuclear propostos até aqui, temos

$$V(r) = V_c(r) + V_{12}(r)S_{12} + V_{LS}(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (2.55)$$

(*) A alternativa $(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \frac{\mathbf{r}}{r})$ pouco acrescenta, por ser uma combinação linear da anterior e de $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$.

Fig. 2.3 - Espalhamento de prótons polarizados

Para estabelecermos a forma das funções desconhecidas contidas em (2.55) podemos adotar como critério que o potencial descreva corretamente as observações experimentais sobre o espalhamento núcleon-núcleon, ou as propriedades de certos núcleos, como o dêuteron. Os valores dessas funções devem ser ajustados de modo a satisfazerem o critério acima; conseguiremos assim um *potencial fenomenológico*. Potenciais fenomenológicos são largamente empregados, não só na construção de forças núcleon-núcleon, mas também na interação de núcleos complexos, onde a participação dos núcleons individuais se torna extremamente difícil de explicitar.

2.6 - A Origem da Força Nuclear

Uma outra maneira de se atacar o problema da força nuclear é analisando diretamente os processos de troca de mésons. O potencial de troca mais simples deve-se à troca de apenas um pión. Mas, somente a parte de longa distância do potencial pode ser explicada dessa forma. Como o pión possui spin zero, sua função de onda deve ser descrita pela equação de Klein-Gordon

$$\left(\nabla^2 - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (2.56)$$

Fazendo uma separação de variáveis, obteremos uma equação de onda independente do tempo para energia total do pión igual a 0 (energia de ligação igual à massa de repouso),

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi = 0, \quad (2.57)$$

onde

$$\mu = \frac{m_{\pi}c}{\hbar}. \quad (2.58)$$

Uma solução aceitável para (2.57) é

$$\phi = g \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (2.59)$$

na qual g é uma constante indeterminada que tem o mesmo papel que a carga no caso da eletrostática, onde o potencial que resulta da interação entre duas cargas iguais é $qV = q^2/r$. Essa interação resulta da emissão contínua de fótons virtuais entre as cargas.

Fig. 2.4 - Forma do potencial núcleon-núcleon

Podemos supor que o potencial entre dois núcleons é proporcional à função de onda do pión, ou seja, à amplitude de probabilidade de que o pión emitido se encontre nas imediações do outro núcleon, e encontramos o *potencial de Yukawa*

$$V = g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (2.60)$$

onde utilizamos o fator g^2 , em analogia com a eletrostática. O potencial acima decai exponencialmente e o raio de alcance pode ser estimado por

$$R \cong \frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c} \cong 0,7 \text{ fm}, \quad (2.61)$$

em concordância com o resultado obtido na seção 1.2 utilizando-se o Princípio da Incerteza. O campo de força entre dois prótons, ou entre dois nêutrons, só pode ser produzido pela troca de píons neutros. Entre um próton e um nêutron a troca pode ser feita por meio de píons carregados.

É fato experimental bem estabelecido que a força nuclear é fortemente repulsiva a distâncias muito curtas e a forma da parte central do potencial nuclear deve ser, esquematicamente, a da figura 2.4. O poço do potencial, ou seja, a sua parte atrativa de alcance médio, pode ser descrito pela troca de dois píons. É interessante observar que essa parte do potencial é criada de um modo análogo à força de Van der Waals entre duas moléculas (figura 2.5).

Fig. 2.5 - A força coulombiana entre os prótons e elétrons em um átomo pode ser descrita em Eletrodinâmica Quântica pela troca de um fóton e a força de Van der Waals pela troca de mais de um fóton.

As ligações moleculares podem ser descritas pela troca de dois fótons. O primeiro fóton, emitido pela molécula 1, induz um dipolo elétrico na molécula 2 e esse dipolo emite por sua vez um fóton virtual, que induz um outro dipolo elétrico na molécula 1. A interação entre os dois dipolos dá origem à força de Van der Waals. Os píons tomam o lugar dos fótons no caso das forças nucleares. A produção de um dipolo elétrico é análoga à excitação de um núcleon em uma ressonância Δ . Os núcleos são, portanto, ligados devido a uma espécie de força de Van der Waals (figura 2.6).

Como o pión carrega isospin e como a dependência da interação núcleon-núcleon é acompanhada por uma dependência no spin, pode-se mostrar [BD64] que a interação

devida à troca de um pión deve ser da forma

$$V^{\text{OPEP}} = \frac{g^2}{3\hbar c} m_\pi c^2 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} (\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)}) \left[\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right) S_{12} \right], \quad (2.62)$$

onde a sigla OPEP provém do inglês “One-pion-exchange potential”. Esse potencial descreve bem o espalhamento núcleon-núcleon para momentos angulares $l \geq 6$. O valor alto desse limite mostra que o potencial OPEP descreve a força nuclear de maneira razoável a grandes distâncias ($r \geq 2$ fm).

A parte de curto alcance do potencial núcleon-núcleon representada na figura 2.4 é devida à troca de três píons, ou mais. A parte essencial desse processo pode ser descrita pela troca efetiva de uma ressonância de três píons, conhecida por méson ω com spin 1 e $m_\omega = 783,8$ MeV. A troca de ω é importante para duas propriedades da força nuclear: a parte repulsiva do potencial e a interação de spin-órbita.

Fig. 2.6 - Força nuclear devida à troca de dois píons. A partícula Δ é uma espécie de núcleon polarizado devido ao campo de píons do outro núcleon.

Ambas as propriedades possuem também analogia com o caso eletromagnético. No caso do eletromagnetismo a troca de um fóton também dá origem à força de repulsão entre cargas de mesmo sinal. No caso da força nuclear, devido à grande massa do méson ω , a força repulsiva é de alcance muito curto. A partir desta argumentação também se pode concluir que esse potencial fortemente repulsivo se transforma em um potencial fortemente atrativo para um par núcleon-antinúcleon a curtas distâncias.

Em distâncias intermediárias o potencial núcleon-núcleon é, como já enfatizamos, apropriadamente descrito em termos da troca de dois píons. Uma outra maneira de descrever essa parte do potencial é pela troca de uma única partícula, o méson- ρ . A massa do méson- ρ é $(768, 1 \pm 0, 5)$ MeV/ c^2 e imagina-se que ele seja constituído de dois píons, daí a equivalência com a troca de dois píons.

Os potenciais derivados da hipótese da troca de π , ρ e ω consistem em combinações de partes centrais, tensoriais, de spin-órbita, e de termos de ordem superior. As funções

radiais que acompanham esses termos contém um total de até 50 parâmetros, que são ajustados aos dados do dêuteron e ao espalhamento núcleon-núcleon.

Alguns autores têm utilizado parametrizações puramente fenomenológica para o potencial nuclear, seguindo a forma dos potenciais devidos à troca de mésons. Esses potenciais possuem componentes atrativas e repulsivas. A grandes distâncias eles se reduzem ao potencial OPEP, enquanto que a pequenas distâncias eles possuem uma parte extremamente repulsiva. Essa parte repulsiva é comumente chamada de “caroço duro”, com $V(r) \rightarrow \infty$ para $r < r_c \cong 0,4$ fm. Outros autores usam um potencial repulsivo que vai ao infinito apenas para $r \rightarrow 0$. Esses potenciais são conhecidos por potenciais de “caroço-mole”. O mais conhecido desses potenciais é o potencial de caroço-mole de Reid [Re68]. Ele tem a forma

$$V = V_c(\mu r) + V_{12}(\mu r)S_{12} + V_{LS}(\mu r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.63)$$

onde

$$V_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{-nx}}{x} \quad ; \quad V_{LS}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-nx}}{x}$$

e

$$V_{12}(x) = \frac{b_1}{x} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} - \left(\frac{b_0}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-b_0 x} \right] + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{e^{-nx}}{x}.$$

As constantes são diferentes para todos os valores de T , S e L . Somente a_1 , b_1 e c_1 são dados de modo a se obter o potencial OPEP para grandes distâncias. Para $l > 2$, o potencial de Reid é substituído pelo potencial OPEP. O potencial de Reid é bastante realístico e descreve bem, dentro de sua faixa de atuação, as propriedades do sistema de dois núcleons.

Sugestões para leitura

- M.R. Robilotta, “Processos Mesônicos em Física Nuclear”, *Proceedings of the II J.A. Swieca Summer School of Nuclear Physics*, publicado pela Sociedade Brasileira de Física, 1987, editado por C.L. Lima, M.C. Nemes e E. Wolyneec.
- D.M. Brink, “Nuclear Forces”, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- M.J. Moravcsik, “The Two-Nucleon Interaction”, Oxford University Press, N. York, 1964.
- R. Wilson, “The Nucleon-Nucleon Interaction”, Wiley-Interscience, N. York, 1963.

Exercícios

1 - Use valores tabelados das massas do próton, nêutron e dêuteron e tente deduzir o valor (2.1) da energia de ligação do dêuteron.

2 - Calcule a perda percentual de massa devida à energia de ligação para os sistemas: a) Terra-Lua; b) átomo de hidrogênio; c) dêuteron. Verifique que só no último caso esse efeito é importante.

3 - Usando (2.8) e (2.11) como função de onda do dêuteron, calcule: a) a fração de tempo que o nêutron e o próton gastam fora do alcance da força entre eles. b) o raio médio quadrático do dêuteron.

4 - Uma generalização comum de se fazer no potencial da figura 2.1 é a adição de um “caroço duro”, isto é, $V = +\infty$ para $r < c$, sendo c o raio do caroço. Mostre que a presença desse caroço modifica as funções de onda mas não altera a relação entre E_B , R e V_0 dada por (2.14).

5 - Suponha que o potencial de interação entre o nêutron e o próton seja exponencial, na forma $V = V_0 e^{-r/2r_n}$, onde V_0 e r_n são, respectivamente, a profundidade e o alcance do potencial nuclear.

(a) Escreva a equação de Schrödinger (no sistema do centro de massa) para o estado fundamental do dêuteron, de momento angular $l = 0$.

(b) Use a definição $x = e^{-2r/r_n}$ e $\psi(r) = u(r)/r$. Mostre que a equação de Schrödinger tem como solução uma função de Bessel. Escreva a solução geral desta equação.

(c) Aplicando as condições de contorno (ψ finito para $r = 0$ e $r = \infty$), determine a relação entre V_0 e r_n .

6 - Para um sistema de dois núcleons mostre que $L + S + T$ deve ser ímpar, onde L , S e T são, respectivamente, os números quânticos de momento orbital, de spin e de isospin do sistema.

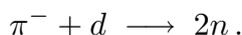
7 - O dêuteron tem spin 1. Quais são os possíveis estados de spin total e de momento angular total de dois dêuterons em um estado de momento angular orbital L ?

8 - Uma partícula de spin 1 move-se em um potencial central da forma

$$V(r) = V_1(r) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} V_2(r) + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})^2 V_3(r).$$

Quais são os valores de $V(r)$ nos estados $J = L + 1$, L , e $L - 1$?

9 - Suponha que o méson π^- (spin 0 e paridade negativa) seja capturado a partir da órbita P em um átomo piônico dando origem à reação



Mostre que os dois nêutrons devem estar em um estado singleto.

10 - Seja o operador S_{12} definido por (2.53). Mostre que, para os estados singleto e tripleto do spin total das duas partículas, valem, respectivamente as relações :

$$S_{12} \chi_{\text{singleto}} = 0$$

e

$$(S_{12} - 2)(S_{12} + 4)\chi_{\text{tripleto}} = 0.$$

11 - Sejam \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 os operadores de spin de duas partículas e \mathbf{r} o raio vetor que conecta as mesmas. Mostre que qualquer potência inteira positiva dos operadores abaixo

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \quad \text{e} \quad \frac{3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)$$

pode ser escrita como uma combinação linear desses operadores e da matriz unidade.

12 - Prove as relações

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \frac{2i}{\hbar}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 - \frac{i\hbar}{2}\mathbf{s}_2$$

$$(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}) = r^2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}).$$

13 - Mostre que a força tensorial, S_{12} , possui uma média angular nula, ou seja, mostre que $\int S_{12} d\Omega = 0$.

14 - Baseado em suas respectivas massas, dê o alcance das forças intemediadas pelas partículas ρ e ω .

3 - CARACTERÍSTICAS GERAIS DO NÚCLEO

3.1 - Introdução

As propriedades básicas dos núcleons foram apresentadas nos capítulos 1 e 2 e a teoria do dêuteron foi desenvolvida. Nosso objetivo a partir deste capítulo é estudar a física de núcleos com um número A qualquer de núcleons, estabelecer a sistemática de suas propriedades e apresentar as teorias que tentam explicá-las. O programa que seguimos no estudo do dêuteron é, no entanto, aqui, inaplicável. A equação de Schrödinger não é mais exatamente resolúvel já para um sistema de três núcleons e estabelecer as propriedades de um núcleo pesado a partir das interações de todos os seus constituintes é uma tarefa irrealizável. O ataque ao problema é feito através do uso de modelos idealizados que incorporam apenas parte da física envolvida e que explicam, cada um deles, um conjunto limitado de dados experimentais. Este capítulo apresenta as características gerais dos núcleos e introduz algumas idéias básicas que serão empregadas na elaboração de modelos nucleares. A apresentação detalhada desses modelos será feita no capítulo 4.

3.2 - O Raio do Núcleo

O raio dos prótons e nêutrons que compõem os núcleos é da ordem de 1 fm. Suponha que um núcleo possua A núcleons e que estes estejam distribuídos dentro de uma esfera de raio R . Se os núcleons pudessem ser considerados como pequenas esferas duras de raio r em contacto umas com as outras, poderíamos escrever

$$A \cong \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

ou, de outra forma,

$$R \cong r_0 A^{1/3}, \quad (3.1)$$

onde colocamos r_0 em lugar de r para levar em conta que mesmo neste modelo de esferas “empacotadas” existem espaços vazios entre elas e o volume nuclear deve ser maior que a simples soma dos volumes de cada esfera. Esperamos, portanto, que r_0 seja algo maior que 1 fm.

Experimentalmente também podemos inferir qual é o raio de um núcleo. Os experimentos que dão os resultados mais precisos são os que utilizam o espalhamento de elétrons. Os elétrons são acelerados e atirados contra um elemento alvo, interagindo eletromagneticamente com os prótons e trazendo, ao saírem, a informação de como esses

prótons estão distribuídos no interior dos núcleos. Em outras palavras, a medição de espalhamento de elétrons nos permite deduzir a distribuição de carga no núcleo. Se supusermos que a densidade de nêutrons e a densidade de prótons tem a mesma forma de distribuição então a distribuição de cargas nos núcleos é igual à distribuição de massa.

O método de se medir a distribuição de cargas no núcleo foi desenvolvida principalmente por R.Hofstadter e colaboradores [Ho62] no acelerador linear da Universidade de Stanford. Os resultados de inúmeras experiências mostram que a densidade de carga (ou de massa), ou seja, o número de cargas (ou a massa) por unidade de volume, pode ser bem descrita por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}}, \quad (3.2)$$

onde ρ_0 , $R_{1/2}$ e a são constantes. A função de r acima é conhecida como *distribuição de Fermi*. Ela cai à metade de seu valor no centro em $r = R_{1/2}$ (figura 3.1). A expressão (3.2) nos diz que a distribuição de núcleons em um núcleo não é como o de uma esfera homogeneamente ocupada com raio bem definido.

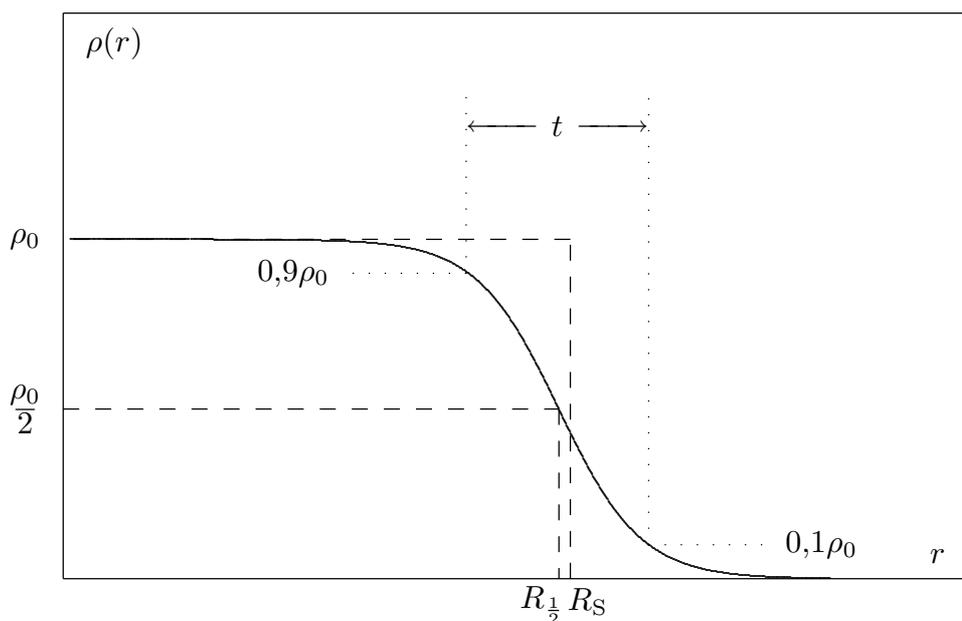


Fig. 3.1 - Densidade de núcleons em função da distância ao centro do núcleo, obedecendo a uma distribuição de Fermi típica.

Os núcleos possuem uma superfície difusa, com a densidade diminuindo rapidamente para $r \gtrsim R_{1/2}$. A quantidade a dá a largura de difusidade da superfície. O intervalo onde a densidade cai de 90% a 10% do valor no centro tem o comprimento $t = 4,4a$. A figura 3.2 mostra a distribuição de cargas em vários núcleos, obtida a partir da análise

Fig. 3.2 - Distribuição de carga em três núcleos, representando os elementos leves, médios e pesados [Ho57].

dos resultados experimentais de Hofstadter e colaboradores em 1957 [Ho57]. Ela dá uma boa idéia do comportamento dessa grandeza para uma vasta gama de massas.

Um exame desses resultados mostra que a distribuição de cargas de núcleos com $A > 20$ é bem descrita por (3.2), com

$$\rho_0 = 0,17 \frac{Ze}{A} \text{ fm}^{-3}, \quad (3.3a)$$

$$a = 0.54 \text{ fm}, \quad (3.3b)$$

$$R_S = 1,128 A^{1/3} \text{ fm}, \quad (3.3c)$$

$$R_{1/2} = R_S - 0,89A^{-1/3} \text{ fm}. \quad (3.3d)$$

R_S é o raio que teria uma esfera carregada homogeneamente, com densidade de carga ρ_o constante e carga total Ze . Se quisermos utilizar (3.2) para descrever a densidade não de carga mas de núcleons para $A > 20$, podemos utilizar os mesmos valores dados em (3.3) mas com $\rho_0 = 0,17$ núcleons/fm³. Para $A < 20$ a distribuição de Fermi (3.2) não é adequada para se descrever a distribuição de cargas (ou de núcleons) pois para núcleos com poucos núcleons é menos clara a idéia de definir uma superfície para os mesmos.

Além do espalhamento de elétrons, outros métodos são utilizados para se determinar experimentalmente o raio de um núcleo. Um deles é estudar o *átomo muônico*. O múon é o parente mais próximo do elétron e possui massa igual a $207m_e$. Múons podem ser capturados por núcleos e formar átomos, onde eles ocupam o lugar dos elétrons. Os níveis atômicos em um átomo muônico são análogos aos de um átomo normal; a diferença está na energia dos níveis e no raio das órbitas muônicas.

A energia de um nível atômico é dada (sem correções relativísticas) por

$$E = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (3.4)$$

onde n é o número quântico principal e

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} \quad (3.5)$$

a massa reduzida do átomo (M é a massa do núcleo). No caso de um átomo muônico, o valor de μ é cerca de 200 vezes maior, e os níveis serão mais fortemente ligados. Se essa fosse a única diferença, a energia de transição entre dois níveis iguais entre átomos normais e muônicos (ΔE e $\Delta E'$, respectivamente) seriam obtidos pela razão $\Delta E/\Delta E' \cong 1/200$. No entanto, como o raio das órbitas (calculado usando o átomo de Bohr) é dado por

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu Z e^2}, \quad (3.6)$$

o raio de um átomo muônico é 200 vezes menor que o de um átomo normal. Se o múon estiver no nível mais baixo (camada K) existirá uma probabilidade razoável de encontrá-lo no interior do núcleo. Os níveis atômicos de um átomo muônico serão alterados devido à interação da parte da função de onda do múon que se encontra no interior do núcleo. Assim, em vez de $\Delta E'$, a energia de transição para o nível mais baixo será $\Delta E' + \Delta E_{\text{vol}}$, com ΔE_{vol} dado por

$$\Delta E_{\text{vol}} = e \int_0^R [\psi_2^2(r) - \psi_1^2(r)] [U_V(r) - U(r)] 4\pi r^2 dr, \quad (3.7)$$

onde $\psi_n^2(r)dV$, com $dV = 4\pi r^2 dr$, é a densidade de probabilidade de se encontrar o múon do orbital n no volume dV situado no interior do núcleo. $U(r) = Ze/r$ é o

potencial que sentiria o múon se o núcleo fosse pontual e $U_V(r)$ é o potencial real no ponto r para um núcleo de tamanho finito. Para uma distribuição uniforme de cargas pode-se mostrar que (R é o raio do núcleo)

$$U_V(r) = \frac{Ze}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

As relações acima nos indicam que da medição experimental da energia de transição entre dois níveis de um átomo muônico podemos inferir o raio do núcleo correspondente.

Os raios nucleares também podem ser obtidos a partir do estudo de reações nucleares ou colisões induzidas por partículas α , e outros núcleos. As experiências de Rutherford com partículas α por volta de 1911 [Ru11] já obtiam o valor (3.1) com $r_0 \cong 1,2$ fm.

3.3 - Energias de Ligação

Para todo sistema ligado, a massa do sistema é menor do que a soma das massas de seus constituintes, se medidas isoladamente. Essa propriedade foi exposta na seção 2.2 para o caso do dêuteron e é um importante atributo do núcleo para qualquer valor de A . Nesse aspecto a física nuclear é singular, pois nos outros campos da física a perda de massa correspondente à ligação é desprezível se comparada à massa do próprio sistema.

A energia de ligação de um núcleo, que é teoricamente a energia necessária para separar o núcleo em todos os seus núcleons, é facilmente calculada se lembrarmos que ela deve ser igual à massa que se perde quando o núcleo é formado. Para um núcleo A_ZX , com número de prótons Z e número de nêutrons $N = A - Z$, ela é dada por

$$B(Z, N) = \{Zm_p + Nm_n - m(Z, N)\}c^2, \quad (3.9)$$

onde m_p é a massa do próton, m_n é a massa do nêutron e $m(Z, N)$ é a massa do núcleo X . Essas massas podem ser medidas por meio do *espectrógrafo de massa*, aparelho que se baseia na trajetória que descreve uma partícula carregada sob a ação de um campo elétrico e um campo magnético. Como o nêutron não possui carga, a sua massa tem que ser medida por outros processos. Pode-se, por exemplo, medir a massa do dêuteron, do próton e, conhecendo-se a energia de ligação do dêuteron através da dissociação do mesmo por um fóton, deduzir a massa de repouso do nêutron.

A energia de ligação definida por (3.9) é sempre positiva. Na figura (3.3) mostramos a energia de ligação por núcleon, B/A em função de A para todos os nuclídeos conhecidos. O valor médio de B/A cresce rapidamente com A para núcleos leves, decrescendo suavemente de 8,5 MeV a 7,5 MeV a partir de $A \cong 60$, onde se situa seu máximo. Podemos dizer que para $A > 30$ a energia de ligação B é aproximadamente proporcional a A .

Na região dos núcleos leves quatro pontos se destacam por terem suas energias de ligação por núcleon maiores que a média local: ${}^4_2\text{He}$, ${}^8_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C}$ e ${}^{16}_8\text{O}$. Os núcleos ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ e

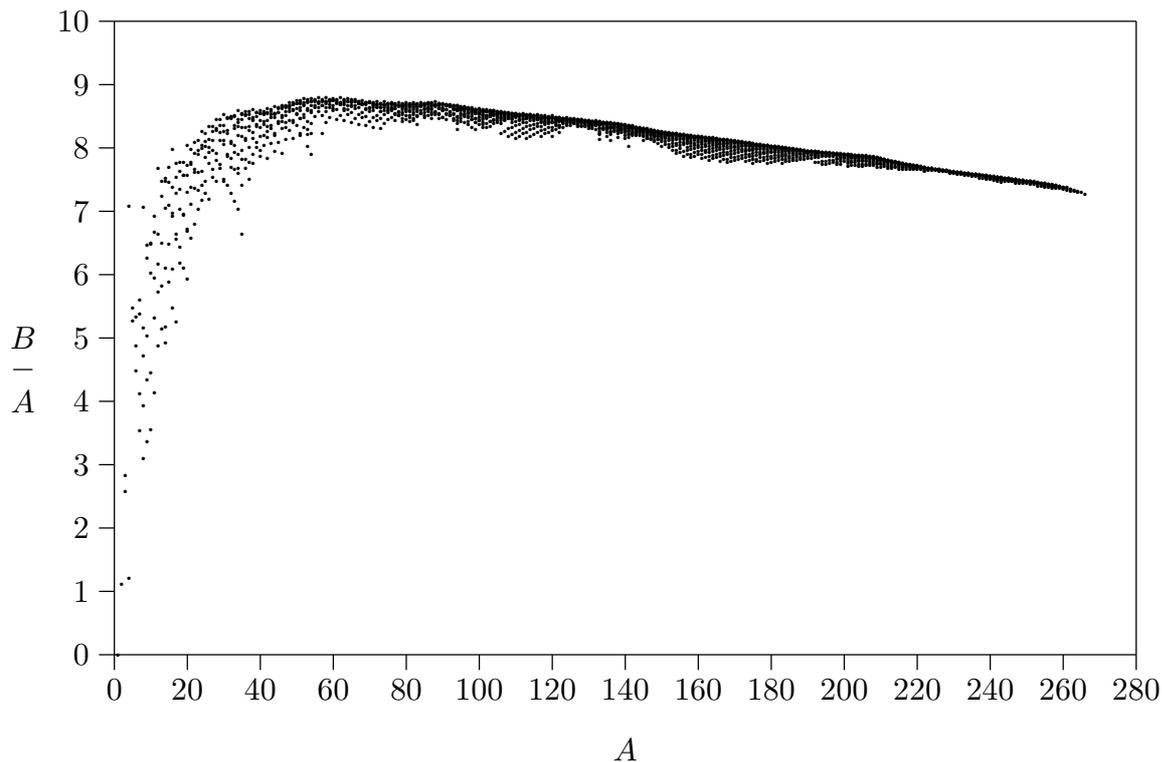


Fig. 3.3 - Energia de ligação por núcleon, B/A , em função do número de massa A .

${}^{24}_{12}\text{Mg}$ também se situam na parte superior do gráfico. Note que esses núcleos possuem número de prótons e de nêutrons iguais e pares.

O crescimento inicial da curva de B/A indica que a fusão de dois núcleos leves produz um núcleo com uma maior energia de ligação por núcleon, liberando energia. Essa é a origem da produção de energia no interior das estrelas. A etapa inicial da evolução de uma estrela é a produção de hélio pela fusão do hidrogênio; em etapas posteriores se dá a produção de elementos cada vez mais pesados pela fusão de núcleos leves. Não é difícil concluir pela figura 3.3 que se uma estrela seguir sem maiores acidentes o curso normal de sua evolução ela terminará como um aglomerado frio de núcleos com $A \cong 60$, pois a partir daí a fusão nuclear não é mais energeticamente vantajosa (ver capítulo 12).

Nos núcleos pesados, por outro lado, é a divisão do núcleo em partes aproximadamente iguais (*fissão nuclear*) que libera energia. A figura 3.3 mostra que nesse caso o ganho é próximo de 1 MeV por núcleon e, assim, cerca de 200 MeV são liberados em cada evento. O processo de fissão nuclear é a base da operação de reatores nucleares, onde nêutrons bombardeiam elementos pesados (normalmente urânio ou plutônio) conduzindo os mesmos à fissão e à produção de mais nêutrons, formando uma reação em cadeia (ver capítulo 11). Também é a base da construção de artefatos de guerra: o explosivo de origem nuclear que recebe a denominação pouco apropriada de bomba atômica tem esse caráter devido à uma rápida e não controlada reação em cadeia que libera uma enorme quantidade de energia em um pequeno volume.

O fato de que a energia de ligação por núcleon é aproximadamente constante para

$A > 30$, deve-se à *saturação das forças nucleares*. Cada núcleon está ligado a $(A - 1)$ outros, de modo que no total existem $A(A - 1)/2$ ligações entre os núcleons em um núcleo com número de massa A . Assim, se o alcance das forças núcleon-núcleon fosse maior que as dimensões dos núcleos, a energia de ligação B deveria ser proporcional ao número de ligações entre eles, ou seja, B deveria ser proporcional a A^2 . Como esse não é o caso, conclui-se que as forças núcleon-núcleon possuem alcance bem menor que o raio nuclear.

A energia de ligação B é a energia necessária para se separar todos os prótons e todos os nêutrons de um núcleo. Uma outra quantidade de interesse é a *energia de separação* de um núcleon do núcleo. A energia de separação de um nêutron de um núcleo (Z, N) é dada por

$$\begin{aligned} S_n(Z, N) &= \{m(Z, N - 1) + m_n - m(Z, N)\}c^2 \\ &= B(Z, N) - B(Z, N - 1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da mesma forma se pode definir a energia de separação de um próton ou de uma partícula α . A energia de separação pode variar desde alguns MeV até cerca de 20 MeV. Ela depende muito da estrutura do núcleo considerado. Observa-se que S_n é maior para núcleos com número par de nêutrons. Podemos definir uma *energia de emparelhamento* como a diferença entre a energia de separação de um núcleo com número par de nêutrons e a de um núcleo vizinho, isto é,

$$\delta_n(Z, N) = S_n(Z, N) - S_n(Z, N - 1), \quad (3.11)$$

onde N é par. Observa-se experimentalmente que tanto δ_n quanto δ_p são cerca de 2 MeV.

Quando se plota a energia de separação em função de Z ou N nota-se que ao se cruzar os valores

$$2 \quad 8 \quad 20 \quad 50 \quad 82 \quad 126 \quad 184 \quad (*)$$

a energia de separação varia de uma forma brusca. Esses valores são conhecidos como *números mágicos* e núcleos com Z (ou N) mágico têm a última camada de prótons (ou nêutrons) completa, de modo semelhante ao que ocorre na física atômica com as camadas fechadas de elétrons dos gases nobres. Esse assunto será discutido adiante em conexão com o modelo de camadas para os núcleos.

3.4 - Momento Angular Total do Núcleo

Sendo o núcleo um sistema quântico composto de A núcleons e sendo o núcleon um férmion (partícula de spin semi-inteiro) as leis da Mecânica Quântica de adição de

(*) os dois últimos valores se referem somente aos nêutrons

momentos angulares estabelecem que o momento angular total ou, mais usualmente, o “spin” do núcleo, é um número inteiro vezes \hbar se A é par e um inteiro mais meio vezes \hbar se A é ímpar. Isso é um reflexo direto do valor do spin do nucleon, $\frac{1}{2}\hbar$, já que momentos angulares orbitais só contribuem com valores inteiros de \hbar .

Determinações experimentais do valor do spin do núcleo podem ser feitas, entre outras técnicas, através da perturbação magnética causada no espectro atômico pelo spin nuclear (estrutura hiperfina) e os resultados não só corroboram o esquema acima como também adicionam um dado importante: o spin dos núcleos par-par (Z e N pares) é sempre zero. Podemos resumir esses resultados num esquema:

$$\begin{aligned} I &= n\hbar \text{ para núcleos ímpar-ímpar} \\ I &= (n + 1/2)\hbar \text{ para núcleos ímpares (par-ímpar ou ímpar-par)} \\ I &= 0 \text{ para núcleos par-par} \end{aligned}$$

sendo I o número quântico de momento angular total e n um número inteiro maior ou igual a zero.

A correta determinação dos valores dos spins nucleares é elemento importante na maior ou menor aceitação de modelos que tentam descrever as propriedades nucleares. Esses modelos serão apresentados no capítulo 4.

3.5 - Momentos Multipolares

Uma dada distribuição de cargas $\rho(\mathbf{r}')$ confinada a uma certa região, produz em cada ponto \mathbf{r} do espaço um potencial

$$V = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (3.12)$$

O fator $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$ da integral (3.12) pode ser expandido em uma série de Mac-Laurin para 3 variáveis,

$$f(t, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right]^n f(t, u, v), \quad (3.13)$$

sendo as derivadas calculadas no ponto $t = 0, u = 0, v = 0$. Usando (3.13) para as coordenadas da fonte ($t = x',$ etc.), (3.12) assume a forma

$$V = \frac{\int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{r} + \frac{x_i \int x'_i \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{r^5} + \dots, \quad (3.14)$$

onde $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$. Em (3.14) foi usada a *convenção da soma*, onde a repetição de um índice em um mesmo termo indica soma sobre esse índice, ou seja, $x_i x'_i \equiv \sum_{i=1}^3 x_i x'_i$, etc.

A primeira parcela de (3.14) é idêntica ao potencial de uma carga $q = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ (*monopolo*) colocada na origem. A segunda tem a forma do potencial de um *dipolo* (duas cargas próximas, iguais e de sinal contrário), as integrais representando cada componente i do vetor *momento de dipolo*

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.15)$$

A terceira parcela de (3.14) representa a contribuição de um *quadrupolo* (dois dipolos próximos, de momento total nulo), as seis integrais

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.16)$$

sendo as componentes do tensor *momento de quadrupolo*. Usando (3.15) e (3.16) podemos reescrever (3.14) mais compactamente como

$$V = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (3.17)$$

As potências crescentes do denominador fazem com que a contribuição de multipolos de mais alta ordem (octupolo, hexadecapolo, etc.) seja cada vez menos importante.

A expansão em multipolos pode ser empregada para o potencial coulombiano criado pelos prótons mas, para tanto, é necessário que o tratamento acima seja adaptado a um sistema quântico. Com esse objetivo, a densidade de carga $\rho(\mathbf{r}')$ deve ser entendida como Z vezes a densidade de probabilidade $|\psi|^2 = \psi^*(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$ de localizar um próton no ponto \mathbf{r}' . Uma primeira consequência para o caso nuclear é que o momento de dipolo (3.15) é nulo. Com efeito, as funções de onda $\psi(\mathbf{r})$ representam estados nucleares de paridade definida e $|\psi|^2$ deve necessariamente ser uma função par, o que anula a integral (3.15) tomada em todo o espaço. A primeira informação importante sobre a distribuição de cargas no núcleo deve vir, portanto, do termo quadrupolar, o terceiro termo da expansão (3.14). O momento de quadrupolo elétrico (3.16) a ele associado será nosso objeto de estudo na seção 3.7.

Assim como uma distribuição de carga dá lugar a uma expansão do tipo (3.12), uma distribuição localizada de correntes $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ produz um campo vetorial, com o potencial vetor \mathbf{A} podendo ser expandido em uma soma de termos multipolares. Neste caso, no entanto, o termo monopolar não existe e os demais termos pares (potência par de r) se anulam no caso nuclear por considerações semelhantes às apresentadas no caso anterior. Assim, nossa expansão se reduz a um único termo importante [Ja75],

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (3.18)$$

com $\boldsymbol{\mu}$, o *momento de dipolo magnético*, sendo dado por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.19)$$

As informações sobre a estrutura nuclear que se pode extrair de medidas do momento de dipolo magnético serão descritas na seção seguinte. De qualquer modo, o operador quântico correspondente a essa grandeza não será obtido de (3.19) e sim da relação de $\boldsymbol{\mu}$ com o momento angular correspondente, equações (1.26) e (1.27).

3.6 - Momento de Dipolo Magnético

A expressão (3.19) traduz o valor do momento de dipolo magnético devido à presença de correntes; ela descreveria no caso nuclear o momento magnético devido ao movimento orbital dos prótons. Essa descrição não seria, contudo, completa. Vimos na seção (1.6) que os núcleons possuem momentos magnéticos intrínsecos e esses têm que ser levados em conta no cômputo total.

Relacionar o momento magnético total do núcleo com os momentos de todos os seus constituintes não é, como vimos, uma tarefa possível. Uma informação experimental é, no entanto, de grande relevância para nosso estudo: assim como no caso do momento angular, o momento magnético de todos os núcleos par-par é zero, isto é, o acoplamento entre os momentos dos núcleons de um núcleo par-par é de tal sorte que o momento magnético total se anula. Isso permite admitir, em primeira hipótese, que o momento magnético de um núcleo ímpar é produzido pelo único núcleon desemparelhado, chamado, por analogia com a física atômica, de *núcleon de valência*. Para calcularmos seu valor é necessário primeiro recordar que, para um sistema quântico, o valor esperado de uma grandeza deve ser obtido a partir do operador correspondente e da função de onda do sistema. O momento magnético de dipolo é *definido* como o valor esperado da componente-z do operador correspondente, calculado no estado onde é máxima a componente do momento angular total. Essa definição foi empregada para o caso do dêuteron ao se escrever a equação (2.34). O que se propõe agora é calcular essa expressão para um núcleo ímpar.

Sejam l_z e s_z as projeções dos momentos angulares orbital e de spin do núcleon (próton ou nêutron) desemparelhado que, como vimos, é responsável pelas propriedades do núcleo ímpar. O momento magnético desse núcleon é então escrito, em unidades de magneton nuclear:

$$\mu_z = g_l l_z + g_s s_z \quad (3.20)$$

onde se usou $\hbar = 1$. Deve-se notar agora que a função de onda $\psi_{l s j}^j$, que aparece na definição (2.34) de μ não é auto-função de l_z e s_z separadamente mas somente de sua soma j_z . É mais conveniente, por isso, reescrever (3.20) como

$$\mu_z = g_l j_z + (g_s - g_l) s_z, \quad (3.21)$$

e, agora, usando (2.34),

$$\mu = g_l j + (g_s - g_l) \langle s_z \rangle . \quad (3.22)$$

O valor esperado de s_z pode ser obtido se considerarmos que o vetor \mathbf{s} , assim como \mathbf{l} precessa em torno do vetor \mathbf{j} e que \mathbf{s} pode ser decomposto em uma componente sobre \mathbf{j} e em outras duas componentes de valor médio nulo. Isso permite escrever

$$\langle s_z \rangle = \langle (\mathbf{s}_j)_z \rangle = \left\langle \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{s})j_z}{j^2} \right\rangle = \frac{j}{2j(j+1)} [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)], \quad (3.23)$$

onde se usou o fato de que $\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 + s^2)/2$. Logo, para os dois valores de j possíveis, $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$, o momento magnético calculado por (3.22) se bifurca em duas expressões

$$\mu = g_l \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s, \quad j = l + \frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

$$\mu = g_l \frac{j(j + \frac{3}{2})}{j + 1} - \frac{j g_s}{2(j + 1)}, \quad j = l - \frac{1}{2}.$$

A comparação de (3.24) com os valores experimentais pode ser vista nos chamados *diagramas de Schmidt*, que são traçados para os casos de o núcleon desemparelhado ser um próton ou um nêutron. A figura 3.4 mostra os dois diagramas de Schmidt respectivos, onde μ calculado por (3.24) é comparado com o valor experimental do momento magnético para diversos *nuclídeos* (um nuclídeo é um espécime nuclear, ou seja, um núcleo com um determinado valor de Z e A). Com base nesses diagramas pode-se fazer as seguintes observações:

- a) Se o modelo de um único núcleon descrevendo as propriedades do núcleo fosse inteiramente satisfatório, os pontos experimentais cairiam em cima das linhas cheias, chamadas *linhas de Schmidt*. Embora tal não ocorra é possível distinguir claramente dois grupos de pontos, cada um associado a uma linha. A identificação de um nuclídeo de momento angular total j conhecido com um dos grupos implica no conhecimento do valor de l de seu núcleon desemparelhado, informação que não pode ser obtida diretamente da experiência. Com o valor de l pode-se determinar a paridade do estado fundamental daquele nuclídeo e essa determinação resulta correta na maior parte dos casos.
- b) Os pontos experimentais acompanham a inclinação das retas e estão, com muito poucas exceções, situados na região entre elas. Isso pode ser explicado admitindo-se que a parte orbital de (3.24) (onde g_l é o coeficiente angular para $j = l + 1/2$ e também aproximadamente para $j = l - 1/2$) é bem descrita pelo modelo e que o valor absoluto de g_s é, de fato, menor do que o valor medido para nêutrons e prótons livres. Vimos anteriormente que esses últimos valores estão ligados ao

Fig. 3.4 - Diagramas de Schmidt para núcleos de: a) Z ímpar - N par e b) Z par - N ímpar. Círculos vazios representam núcleos com 1 núcleon a mais ou a menos que uma camada fechada de 2, 8, 20, 28, 40, 50, 82 ou 126 núcleons.

fenômeno de emissão e absorção de mésons virtuais e é admissível que esse processo seja perturbado pela presença dos outros núcleons dentro do núcleo.

- c) A idéia de que um núcleo ímpar tem suas propriedades ditadas pelo núcleon de valência deveria ser mais verdadeira se o “caroço” tivesse um número mágico de prótons ou nêutrons. Nesse caso ele seria mais “fechado” e sua interação com o núcleon isolado seria menor. Tal coisa não é, entretanto, observada na prática, se levarmos em conta que os círculos vazios na figura 3.4 não estão, em média, significativamente mais próximos das linhas de Schmidt do que os demais pontos. A idéia é de que, de certa forma, o núcleon isolado polariza o caroço passando também este a contribuir para o momento magnético do núcleo. Essas considerações também se aplicam ao caso do momento de quadrupolo elétrico do núcleo, que analisaremos a seguir.

3.7 - Momento de Quadrupolo Elétrico

Pelas considerações feitas na seção 3.15 os valores

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.25)$$

são as componentes do tensor momento de quadrupolo elétrico do núcleo. A carga Ze do núcleo foi excluída da definição (3.25), o que dá para o momento de quadrupolo a dimensão de área. A unidade normalmente empregada é o *barn*, correspondente a 10^{-24}cm^2 (ou 10^2fm^2).

Na aplicação de (3.25) devemos levar em conta que a existência de simetrias pode simplificar bastante o cálculo dos momentos multipolares. Se a distribuição de carga tem simetria axial, em relação ao eixo z , por exemplo, as seis componentes do momento de quadrupolo podem se reduzir a somente uma. Isso se deve aos fatos de as integrais relativas às três componentes com $i \neq j$ serem nulas, por terem contribuições positivas e negativas idênticas, e de as integrais em x'^2 e y'^2 serem iguais. Levando em conta que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, obtemos para a parcela de quadrupolo do potencial:

$$\begin{aligned} V_Q &= \frac{Ze}{2} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{r^5} \int \frac{3(x'^2 + y'^2) - 2r'^2}{2} \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{r^5} \int (3z'^2 - r'^2) \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} = \\ &= \frac{Ze}{2r^3} \int (3z'^2 - r'^2) \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (3.26)$$

que depende de uma única integral sobre as variáveis da fonte,

$$Q = \int (3z'^2 - r'^2) \psi^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.27)$$

e que se entende como o momento de quadrupolo do núcleo. A expressão (3.27) indica que um núcleo *prolato* (em forma de charuto) tem momento de quadrupolo positivo e um núcleo *oblato* (em forma de lente) tem momento de quadrupolo negativo. Um núcleo esférico tem, conseqüentemente, momento de quadrupolo nulo.

Cabe, nesse ponto, uma consideração adicional. O estado fundamental de um núcleo de spin I é composto de $2I + 1$ estados degenerados, um para cada projeção possível de I . A função de onda a ser usada em (3.27) é, *por definição*, a de máximo valor da componente do momento angular total. Isso fornece, para um único próton, com função de onda $\psi_{lsj}^{m_j}$,

$$Q = \langle \psi_{lsj}^j | 3z^2 - r^2 | \psi_{lsj}^j \rangle. \quad (3.28)$$

Podemos agora, usando (3.28) e baseados nas mesmas considerações apresentadas no parágrafo anterior, calcular o momento de quadrupolo de um núcleo de Z ímpar e N par. Há novamente aqui duas possibilidades: $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$. Para a primeira, a imposição $m_j = j$ implica obrigatoriamente em $m_l = l$ e $m_s = 1/2$. A função de onda do próton de valência pode ser escrita como

$$\psi = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^l(\theta, \phi) \chi_{\text{spin}} \chi_{\text{isospin}}; \quad (3.29)$$

observando que as funções de spin e isospin são normalizadas e não sofrem a atuação do operador, temos:

$$Q = \int u_l^2(r) |Y_l^l(\theta, \phi)|^2 r^2 (3\cos^2\theta - 1) \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (3.30)$$

ou

$$Q = \langle r^2 \rangle \int |Y_l^l(\theta, \phi)|^2 (3\cos^2\theta - 1) \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.31)$$

levando-se em conta que

$$Y_l^l(\theta, \phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{(2l)!} e^{il\phi} (\sin\theta)^l \frac{(2l)!}{2^l l!}, \quad (3.32)$$

chega-se ao valor do momento de quadrupolo

$$Q = - \langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2j+2}. \quad (3.33)$$

Em aplicações simples é comum se usar o fato de que o núcleon extra se encontra essencialmente na superfície e escrever $\langle r^2 \rangle = R^2 = r_0^2 A^{2/3}$.

No caso de $j = l - 1/2$, temos dois conjuntos possíveis de valores para as componentes:

$$m_l = l - 1, \quad m_s = 1/2$$

e

$$m_l = l, \quad m_s = -1/2$$

e Ψ é o acoplamento das duas situações :

$$\Psi = C_l \frac{u_l(r)}{r} Y_l^l \chi_{1/2}^{-1/2} \chi_{\text{isospin}} + C_{l-1} \frac{u_l(r)}{r} Y_l^{l-1} \chi_{1/2}^{1/2} \chi_{\text{isospin}}, \quad (3.34)$$

onde C_l e C_{l-1} são os coeficientes de Clebsh-Gordan apropriados. A aplicação de (3.34) em (3.28) resulta no mesmo valor anterior de Q . Assim, (3.33) é em ambos os casos,

Núcleo	Q_{calc} (b)	Q_{exp} (b)
${}^7_3\text{Li}$	-0.013	-0.037
${}^{35}_{17}\text{Cl}$	-0.037	-0.082
${}^{93}_{41}\text{Nb}$	-0.13	-0.32
${}^{175}_{71}\text{Lu}$	-0.18	5.68
${}^{17}_8\text{O}$	0	-0.026
${}^{73}_{32}\text{Ge}$	0	-0.17

Tab. 3.1 - Comparação de valores calculados e medidos do momento de quadrupolo elétrico para diversos núcleos.

$j = l + 1/2$ ou $j = l - 1/2$, o valor do momento quadrupolar de um núcleo de Z ímpar e N par.

É fato bem conhecido que os momentos de quadrupolo elétrico de núcleos par-par que têm momento angular total $j = 0$ são nulos. A equação (3.33) mostra que núcleos ímpares de $j = 1/2$ também têm seu momento quadrupolar igual a zero. Esses resultados fazem parte de um teorema geral que diz que para existir um momento multipolar 2^λ é necessário que o momento angular seja no mínimo igual a $\lambda/2$.

A tabela 3.1 mostra alguns valores de Q calculados por (3.33) e sua comparação com resultados experimentais. Pode-se notar que nos três primeiros casos o cálculo reproduz o sinal mas o valor absoluto de Q é cerca de três vezes menor que o medido. Para o quarto elemento, o ${}^{175}\text{Lu}$, a divergência é completa e os dois últimos casos mostram que mesmo quando o núcleon de valência é um nêutron o valor experimental é diferente de zero, contrariando por completo nossa hipótese básica de que o núcleon extra seria o responsável pelo momento de quadrupolo de um núcleo ímpar. A razão de tais discrepâncias foi comentada ao final da seção 3.6. Elas são mais acentuadas no caso presente e o ${}^{175}\text{Lu}$ não é um caso isolado; ele pertence a uma região, a das Terras Raras, onde os núcleos apresentam grande deformação em seu estado fundamental, dando origem a valores altos para o momento de quadrupolo.

Um panorama geral da situação é mostrado na figura 3.5. Pode-se observar a alternância entre valores positivos de Q (núcleos em forma de ovo) com valores negativos (forma de disco) e a presença dos números mágicos de prótons ou nêutrons nas transições entre as duas situações.

As considerações feitas até aqui nesta seção se referem ao *momento de quadrupolo observado*, relativo a um eixo z qualquer do espaço. Pode-se pensar também em um *momento de quadrupolo intrínseco*, relativo ao eixo de simetria de um núcleo deformado. Chamando de Q' esse momento, pode-se mostrar através de um cálculo quântico que

Fig. 3.5 - Momentos de quadrupolo Q observados, em unidades de ZR^2 . A abcissa mede o número (ímpar) de prótons ou nêutrons. As posições dos números mágicos são indicadas por setas.

os dois momentos estão, no estado fundamental, relacionados por

$$Q = \frac{I(2I - 1)}{(I + 1)(2I + 3)} Q', \quad (3.35)$$

onde I é o spin do núcleo. Fica claro de (3.35) que $Q = 0$ para núcleos de spin $I = 0$ e $I = 1/2$, como estabelecido anteriormente, sem que o momento Q' seja necessariamente nulo. Como exemplo de tal situação, podemos mencionar as regiões de massa onde os núcleos têm uma deformação permanente no estado fundamental (ver seção 5.6). Os valores de Q' para núcleos par-par nessa região são positivos, indicando ser a deformação em forma de um elipsóide alongado. Os valores de Q correspondentes são, no entanto, nulos, já que para núcleos par-par, $I = 0$. Fisicamente, esse resultado corresponde ao fato de um núcleo de spin zero não ter qualquer referência que possa caracterizar uma direção no espaço.

3.8 - Estados Excitados do Núcleo

O conjunto de A núcleons que constitui o núcleo apresenta, como todo sistema quântico ligado, uma sequência de estados excitados de energia, acima de um estado

fundamental (o mais ligado) ao qual se atribui energia zero. Os valores das energias desses estados são apresentados normalmente em diagramas que fornecem ainda, quando conhecidos, os valores do spin e paridade correspondentes a cada estado. Exemplos podem ser vistos na figura 3.6, que apresenta o espectro de níveis dos elementos ${}_{36}^{82}\text{Kr}$ e ${}_{49}^{111}\text{In}$.

Fig. 3.6 - Primeiros estados excitados de um núcleo par-par e de um núcleo ímpar. Os números à direita de cada nível são as energias em MeV e os números à esquerda são o spin e a paridade do estado. Parêntesis assinalam valores incertos.

A distribuição dos estados pode variar enormemente de núcleo para núcleo. O ${}^4_2\text{He}$, por exemplo, tem seu primeiro estado excitado em cerca de 19 MeV enquanto núcleos como ${}^{182}_{73}\text{Ta}$, ${}^{198}_{79}\text{Au}$, ${}^{223}_{88}\text{Ra}$ e ${}^{223}_{90}\text{Th}$ têm mais de 50 estados abaixo de 1 MeV. Mas é regra geral que a densidade de estados aumenta rapidamente com a energia, formando praticamente um contínuo para energias suficientemente altas.

As energias dos primeiros estados excitados também são sensíveis à presença de um número mágico de prótons ou de nêutrons no núcleo. A figura 3.7 mostra a variação da energia média do primeiro estado excitado dos núcleos par-par estáveis em função do número de nêutrons. Os máximos nos números mágicos 8, 20, 28, 50, 82 e 126 são evidentes.

O aparente caos que transparece na ordenação e espaçamento dos níveis de boa parte dos núcleos se deve à presença conjunta de diversos modos de excitação, cada

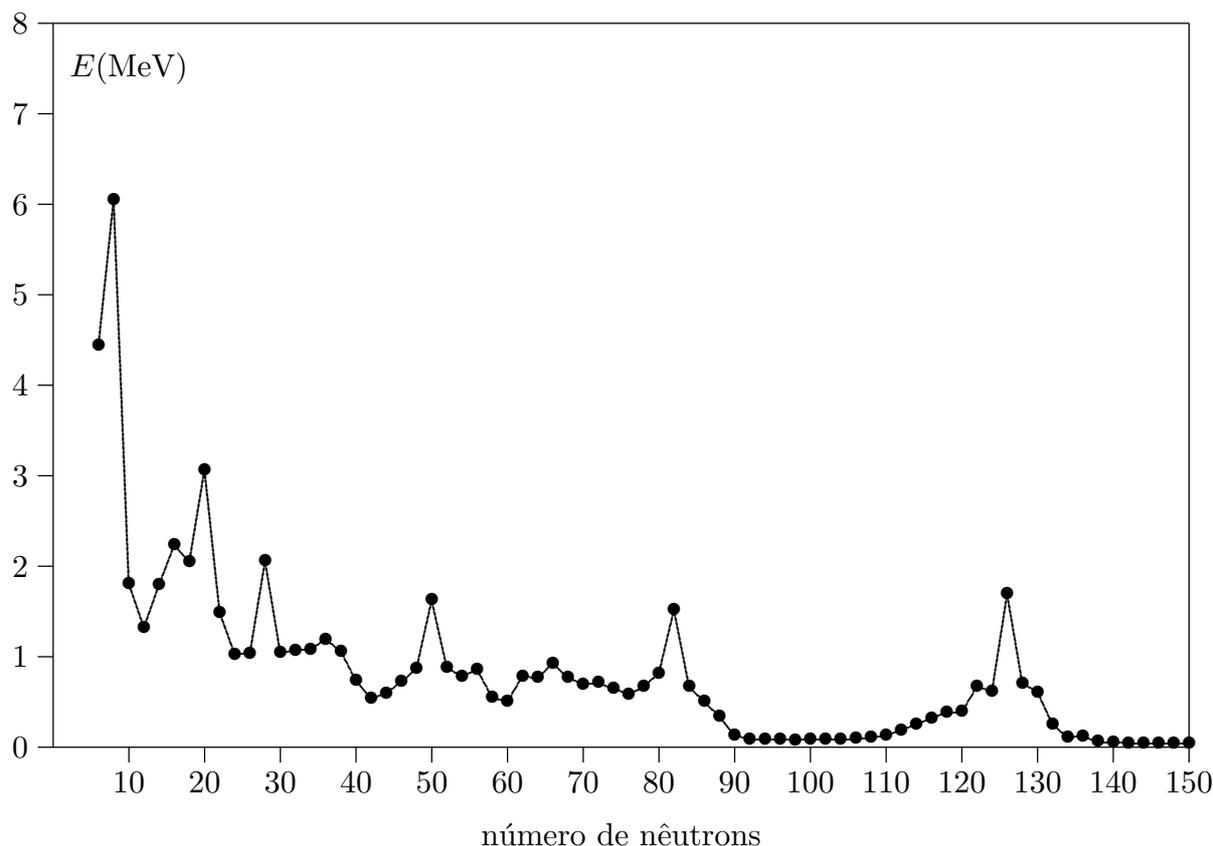


Fig. 3.7 - Média sobre os núcleos par-par estáveis da energia do primeiro estado excitado em função do número de nêutrons.

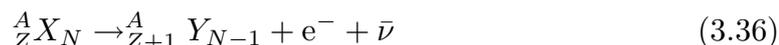
um deles podendo ter, por sua vez, uma estrutura complexa. É verdade, por outro lado, que certos tipos de excitação dão lugar a um grupo de níveis com uma ordenação bem característica, que pode ser facilmente identificado dentro do conjunto total de estados. É tarefa dos vários ramos da espectroscopia nuclear estabelecer a existência dos diversos estados e medir os parâmetros associados a cada um deles. A partir daí é possível, em grande número de casos, identificar o modo de excitação responsável pela presença de um dado estado no espectro de energias de um núcleo. Veremos no capítulo seguinte que modelos nucleares criados a partir de idéias simples são, apesar disso, capazes de fornecer uma grande quantidade de informação acerca da composição dos estados excitados do núcleo.

3.9 - Estabilidade Nuclear

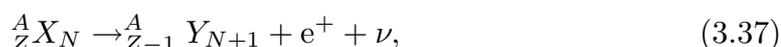
Os estados excitados discutidos na seção 3.8 não são estáveis: na situação mais comum um estado excitado decai para um estado de energia mais baixa do mesmo núcleo com a emissão de um raio- γ . A seqüência dessas transições leva normalmente ao estado fundamental daquele núcleo. O próprio estado fundamental pode, no entanto, não ser estável para muitos núclídeos, sendo estes capazes de se transformar em outros

nuclídeos pela emissão espontânea de uma ou mais partículas ou fragmentos. As diversas opções que existem para a transformação de um núcleo instável serão discutidas com detalhe em capítulos próximos e são descritas sumariamente a seguir:

- a) Decaimentos β^- e β^+ - Núcleos leves estáveis têm seu número de prótons Z semelhante ao número de nêutrons N . Nos núcleos pesados um maior número de nêutrons é necessário para compensar a força coulombiana entre os prótons. Em ambos os casos, quando um núcleo tem um valor de N maior do que o necessário para o equilíbrio ele pode se desintegrar pela emissão de um elétron e um antineutrino (*decaimento β^-*) na forma



se aproximando, assim, de uma situação de maior equilíbrio. Se, por outro lado, N é menor do que o necessário, pode ocorrer o *decaimento β^+*



sendo agora as partículas emitidas um pósitron e um neutrino. Em ambos os casos o núcleo produto Y não é necessariamente estável, podendo também decair pela mesma via ou por outra forma de desintegração.

- b) Captura eletrônica - Esse processo consiste na captura de um elétron atômico pelo núcleo dando lugar a uma diminuição do número de prótons e a um aumento do número de nêutrons de 1 unidade. O efeito é o mesmo do decaimento- β^+ e a captura eletrônica é capaz de competir fortemente com este em núcleos pesados.
- c) Decaimento α - Nesse modo de desintegração é emitida uma partícula- α (núcleo de ${}^4\text{He}$) sendo esse processo energeticamente possível para núcleos pesados. Um exemplo é o decaimento



com a emissão de uma partícula- α de 4,2 MeV. A desintegração- α é responsável pela inexistência de elementos estáveis com $Z > 83$.

- d) Emissão de fragmentos leves - núcleos mais pesados do que o ${}^4\text{He}$ também podem ser emitidos nos poucos casos em que o processo é energeticamente favorável. As emissões de ${}^{14}\text{C}$, ${}^{24}\text{Ne}$, ${}^{28}\text{Mg}$ e ${}^{32}\text{Si}$ por núcleos pesados já foram observadas experimentalmente[Pr89] mas são todas muito raras e de difícil medição.
- e) Fissão - A energética do processo de fissão foi discutida na seção 3.3. É necessário mencionar aqui que a ocorrência desse processo pode se dar espontaneamente para núcleos muito pesados. É ele o responsável, juntamente com a emissão- α , pelos tempos de vida extremamente curtos dos nuclídeos de $Z > 100$.

Os processos acima descritos se dão a partir núcleos instáveis em seu estado fundamental. Eles também podem ocorrer a partir de um estado excitado, mas apenas em situações especiais. A opção básica de um estado excitado é decair para outros estados de

Fig. 3.8 - Distribuição dos núclídeos estáveis (quadrados cheios) e dos núclídeos instáveis conhecidos (quadrados vazios) em função do número atômico Z e do número de nêutrons N . As linhas tracejadas assinalam os números mágicos em ambos os eixos.

energia mais baixa, emitindo radiação- γ ou ejetando um elétron das camadas atômicas (conversão interna). Podemos mencionar ainda que para estados com alta energia de excitação, a emissão de um núcleon é um processo que pode se tornar energeticamente possível e competitivo com a emissão- γ .

A figura 3.8 mostra a distribuição em Z e N dos núclídeos estáveis e dos núclídeos instáveis conhecidos. Desses últimos, a imensa maioria é produzida artificialmente em laboratório e apenas alguns poucos existem na natureza em quantidades significativas. Desse último grupo, o ${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{238}_{92}\text{U}$ e o ${}^{232}_{90}\text{Th}$ são de grande importância em engenharia nuclear.

Os núcleos estáveis definem uma faixa na figura 3.8 denominada *linha de estabilidade- β* . Os núclídeos à direita (ou abaixo) da linha têm excesso de nêutrons e são instáveis por decaimento- β^- e os à esquerda (ou acima) da linha têm excesso de prótons e tendem a decair por β^+ . Quanto mais longe estiver da linha de estabilidade- β mais instável (tempo de decaimento menor) em média é o núclídeo. Recentemente, núcleos com um balanço muito desigual entre o número de prótons e o de nêutrons (denominados de *núcleos exóticos*), tais como ${}^{11}\text{Li}$ e ${}^8\text{He}$, têm sido estudados. O apêndice A faz um resumo de suas propriedades.

Convém estabelecer nesse ponto a nomenclatura relativa a núclídeos que têm alguma quantidade característica em comum. Assim, são definidos como:

Isótopos: núclídeos que têm o mesmo Z , ou seja, o mesmo número de prótons. É freqüente ver-se também isótopo usado como sinônimo de núclídeo e, nesse caso, o termo é empregado também no singular.

Isótonos: núclídeos que têm o mesmo número N de nêutrons.

Isóbaros: núclídeos que têm o mesmo número de massa $A = Z + N$.

O conjunto de 284 núclídeos estáveis, distribuídos em 83 elementos, apresenta certas características marcantes:

- Núcleos leves têm aproximadamente o mesmo número de prótons e nêutrons, ou seja, $Z \cong N$. Núcleos pesados têm $N > Z$.
- Núclídeos de Z par são muito mais numerosos que os de Z ímpar e núclídeos de N par são muito mais numerosos que os de N ímpar.
- Como conseqüência de (b), núclídeos de A par são muito mais numerosos. Dentre estes, os par-par são muito mais comuns. Só existem, na verdade, poucos exemplos de núcleos ímpar-ímpar estáveis: ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$ e ${}^{14}\text{N}$.
- Dos 20 elementos que possuem 1 só isótopo, apenas o ${}^9\text{Be}$ tem Z par.
- O elemento que possui o maior número de isótopos estáveis é o ${}_{50}\text{Sn}$, com 10.

Veremos no capítulo 4 que essas características encontram explicação imediata à luz dos modelos nucleares que lá serão apresentados.

Sugestões para leitura

- C. A. Bertulani, “Núcleos Exóticos”, *Ciência Hoje*, **65** (1990) 60.
- M. A. Preston e R. K. Bhaduri, “Structure of the Nucleus”, Addison Wesley, Reading, Mass., 1975, caps. 3, 4 e 5.
- Uma fonte histórica dos resultados experimentais e teóricos sobre a medida de tamanhos nucleares e suas propriedades gerais, pode ser encontrada em: *Int. Cong. on Nuclear Sizes and Density Distributions*, Stanford, 1957, *Rev. Mod. Phys.* **30** (1958) 412-569.

Exercícios

- Em uma escala na qual uma gota d’água (raio = 1mm) é aumentada até atingir o tamanho da Terra (raio = 6400 Km), qual seria o raio de um núcleo de ${}^{238}\text{U}$?
- Calcule a densidade aproximada da matéria nuclear em gm/cm^3 .
- Determine os valores das constantes da equação 3.3 para o ${}^{120}_{50}\text{Sn}$. Com esses valores, ache a fração de núcleons que está fora do raio $R_{\frac{1}{2}}$. Faça a aproximação que achar razoável para evitar uma integração numérica.
- Um feixe de prótons de 10 MeV bombardeia um alvo de ${}^{208}\text{Pb}$. Qual é a menor distância da superfície do ${}^{208}\text{Pb}$ a que pode chegar o próton?

5 - Calcule a energia de ligação do último nêutron no ${}^4\text{He}$ e do último próton no ${}^{16}\text{O}$. Como essas energias se comparam com B/A para esses núcleos? O que isto nos diz sobre a estabilidade do ${}^4\text{He}$ relativa ao ${}^3\text{He}$, e do ${}^{16}\text{O}$ relativa ao ${}^{15}\text{N}$?

6 - Ache a energia em MeV liberada na fusão de dois dêuterons.

7 - Sabendo-se que a energia de ligação dos elétrons num átomo de número atômico Z é dado por $B_e(Z) = 15,73Z^{7/3}$ eV, calcule o erro no cálculo da energia de ligação dos núcleos a) ${}_{27}^{59}\text{Co}$, b) ${}_{54}^{156}\text{Gd}$, c) ${}_{92}^{238}\text{U}$, quando se despreza a diferença entre a energia de ligação dos Z elétrons no átomo e Z vezes a energia de ligação do elétron no átomo de hidrogênio (13,6 eV).

8 - Calcule a diferença entre a energia de ligação de um núcleo de ${}^{12}\text{C}$ e a soma das energias de ligação de três núcleos de ${}^4\text{He}$ partículas α). Supondo que o ${}^{12}\text{C}$ seja composto pela ligação triangular de três partículas α , qual seria a energia de ligação por “ligação $-\alpha$ ”?

9 - Calcule a energia total de ligação do ${}^8_4\text{Be}$. Por esse resultado, o ${}^8_4\text{Be}$ seria um núcleo estável mas é, na verdade, extremamente instável. Tente justificar essa discrepância. (Sugestão: veja o problema 8).

10 - Obtenha (3.14) a partir de (3.12) e (3.13).

11 - O potencial vetor a uma distância \mathbf{r} de um sistema de cargas localizadas e com densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ por unidade de volume, é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' .$$

Para $r > r'$, use um procedimento semelhante ao do problema anterior para demonstrar as equações (3.18) e (3.19).

12 - O dêuteron possui $J^\pi = 1^+$, e $S = 1$. Qual seria o valor de seu momento magnético se a paridade π fosse $(-)$ não se alterando as outras quantidades acima?

13 - Admitindo que o próton seja uma esfera de raio $1,5 \times 10^{-13}\text{cm}$, de densidade uniforme, com momento angular $\hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)}$, calcule a velocidade angular em revoluções/s e a velocidade periférica no equador do próton. Qual o valor do momento de dipolo magnético do próton nesse modelo clássico?

14 - Calcule o momento de dipolo magnético para os núclídeos abaixo e compare com os valores experimentais

Nuclídeo	I^π	$\mu_{\text{exp}}(\mu_N)$
${}^{75}\text{Ge}$	$\frac{1}{2}-$	0.51
${}^{87}\text{Sr}$	$\frac{9}{2}+$	-1.093

^{91}Zr	$\frac{5}{2}+$	-1.304
^{47}Sc	$\frac{7}{2}-$	5.34
^{147}Eu	$\frac{11}{2}-$	6.06

15 - Em um aparelho de ressonância magnética nuclear, radiação eletromagnética de frequência f cede energia a um próton mudando o sentido de seu spin, que passa de antiparalelo a paralelo a um campo magnético externo B . Para um campo B de 1 T, determine f .

16 - Considere que um núcleo possua a forma de um elipsóide de rotação descrito por

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

e que seja uniformemente carregado. Mostre que o momento de quadrupolo elétrico desse núcleo é dado por

$$Q = \frac{2}{5}Z(b^2 - a^2).$$

Aplice o resultado acima ao dêuteron e, comparando com o valor experimental de Q_d , encontre a percentagem

$$\frac{\Delta R}{R} \simeq 2 \frac{b - a}{b + a}$$

de “alongamento” do dêuteron (use $R = \langle r_d^2 \rangle^{1/2} = 2,1 \text{ fm}$).

17 - Qual é o momento de quadrupolo criado por um próton situado na superfície de um núcleo esférico de $A = 120$?

18 - Mostre que o $^{238}_{92}\text{U}$ é estável em relação ao decaimento por emissão de p, n, e^- , e^+ , mas é instável em relação à emissão α .

19 - Na figura 3.3 o ^6Li tem uma energia de ligação média B/A menor que a do ^4He . Por que o ^6Li não é um α -emissor?

20 - Na relação de núcleos ímpar-ímpar estáveis só constam núcleos muito leves. É possível encontrar uma justificativa para isso?

4 - MODELOS NUCLEARES

4.1 - Introdução

No capítulo anterior falamos sobre a impossibilidade de se obter as propriedades de um sistema de A núcleons a partir das interações fundamentais de seus constituintes e ficou evidenciada a necessidade de se usar modelos que representem apenas alguns aspectos do problema real que tratamos.

Esses modelos são fundamentalmente de duas naturezas. A primeira classe de modelos admite que os núcleons interagem fortemente no interior do núcleo e seu livre caminho médio é pequeno. É uma situação idêntica a das moléculas de um líquido e o modelo da gota líquida pertence a essa primeira classe. Esses são chamados de *modelos coletivos* e estudam fenômenos que envolvem o núcleo como um todo.

Ao lado desses existem os *modelos de partícula independente* que sustentam que o Princípio de Pauli restringe as colisões dos núcleons na matéria nuclear, que devem ter, por isso, um livre caminho médio grande. As diversas formas de modelo de camadas são classificadas nesse esquema.

Hoje se tem a clara noção de que o núcleo pode exibir fenômenos coletivos e de partícula independente e cada modelo encontra sua utilidade na explicação de um conjunto específico de propriedades nucleares.

4.2 - O Modelo da Gota Líquida

Esse modelo se baseia na suposição de que o núcleo pode apresentar comportamento idêntico ao de uma gota líquida, devido principalmente ao fato de ocorrer, em ambos os casos, a saturação das forças entre seus constituintes. Essa idéia é o ponto de partida para se obter uma equação para a energia de ligação do núcleo, introduzida na seção 3.3. Em sua forma mais simples essa equação contém a contribuição de cinco parcelas:

1) A parcela principal da energia de ligação é a chamada *energia de volume*. Ela parte do fato experimental de que a energia de ligação por núcleon é aproximadamente constante (ver figura 4.1), logo a energia de ligação total é proporcional a A :

$$B_1 = a_V A. \quad (4.1a)$$

Se a interação núcleon-núcleon fosse a mesma para todos os possíveis pares de núcleons, a energia total de ligação deveria ser proporcional ao número total de pares, que é igual a $A(A - 1)/2 \cong A^2/2$. Logo, a energia de ligação por núcleon seria proporcional a A . O fato de ser essa energia constante se deve ao curto alcance da força nuclear, só havendo a interação de um núcleon com seus vizinhos mais próximos. Essa é uma importante propriedade do núcleo, conhecida como *saturação das forças nucleares*.

2) Os núcleons que estão na superfície contribuem menos para a energia de ligação por só sentirem unilateralmente a força nuclear. O número de núcleons na superfície deve ser proporcional à área da superfície $4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$. Devemos portanto corrigir a equação (4.1a) adicionando a *energia de superfície*

$$B_2 = -a_S A^{2/3}. \quad (4.1b)$$

3) A energia de ligação deve também ser menor devido à repulsão coulombiana entre os prótons. A energia de Coulomb de uma esfera com distribuição homogênea de carga, e carga total Ze , é dada por $(3/5)(Ze)^2/R = (3/5)(e^2/r_0^2)(Z^2/A^{1/3})$. Assim, a *energia coulombiana* contribui negativamente para a energia de ligação com uma parcela da forma

$$B_3 = -a_C Z^2 A^{-1/3}. \quad (4.1c)$$

4) Se o núcleo possui um número diferente de prótons e nêutrons, sua energia de ligação é menor que a de um núcleo simétrico. A razão desse termo ficará clara quando virmos o modelo do gás de Fermi na próxima seção. Esse *termo de assimetria* também contribui negativamente e é dado por

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A}. \quad (4.1d)$$

5) A energia de ligação é maior quando os números de prótons e nêutron são pares (núcleos par-par) e é menor quando um dos números é ímpar (núcleos ímpares) e, principalmente, quando ambos são ímpares (núcleo ímpar-ímpar). Assim, introduzimos um *termo de emparelhamento*

$$B_5 = \begin{cases} +\delta & \text{para núcleos par-par} \\ 0 & \text{para núcleos ímpares} \\ -\delta & \text{para núcleos ímpar-ímpar} \end{cases} \quad (4.1e)$$

Empiricamente se encontra que

$$\delta \cong a_P A^{-1/2}. \quad (4.1f)$$

Reunindo-se os termos em (4.1) obtemos

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2} a_P A^{-1/2}. \quad (4.2)$$

Substituindo na equação (3.9) obtemos uma equação para a massa de um núcleo

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} - \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2} a_P A^{-1/2}. \quad (4.3)$$

A expressão (4.3) é conhecida como *fórmula semi-empírica de massa* ou fórmula de Weizsäcker [We35]. As constantes que aparecem em (4.3) são determinadas empiricamente, ou seja, pela análise de dados. Um bom ajuste é obtido utilizando-se [Wa58]

$$\begin{aligned}
 a_V &= 15,85 \text{ MeV}/c^2 \\
 a_S &= 18,34 \text{ MeV}/c^2 \\
 a_C &= 0,71 \text{ MeV}/c^2 \\
 a_A &= 92,86 \text{ MeV}/c^2 \\
 a_P &= 11,46 \text{ MeV}/c^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

No entanto, outros bons conjuntos de parâmetros também podem ser encontrados. Observe que uma pequena variação em a_V ou a_S provoca uma grande variação nos demais parâmetros. Isso se deve a uma maior importância dos termos correspondentes na fórmula de massa.

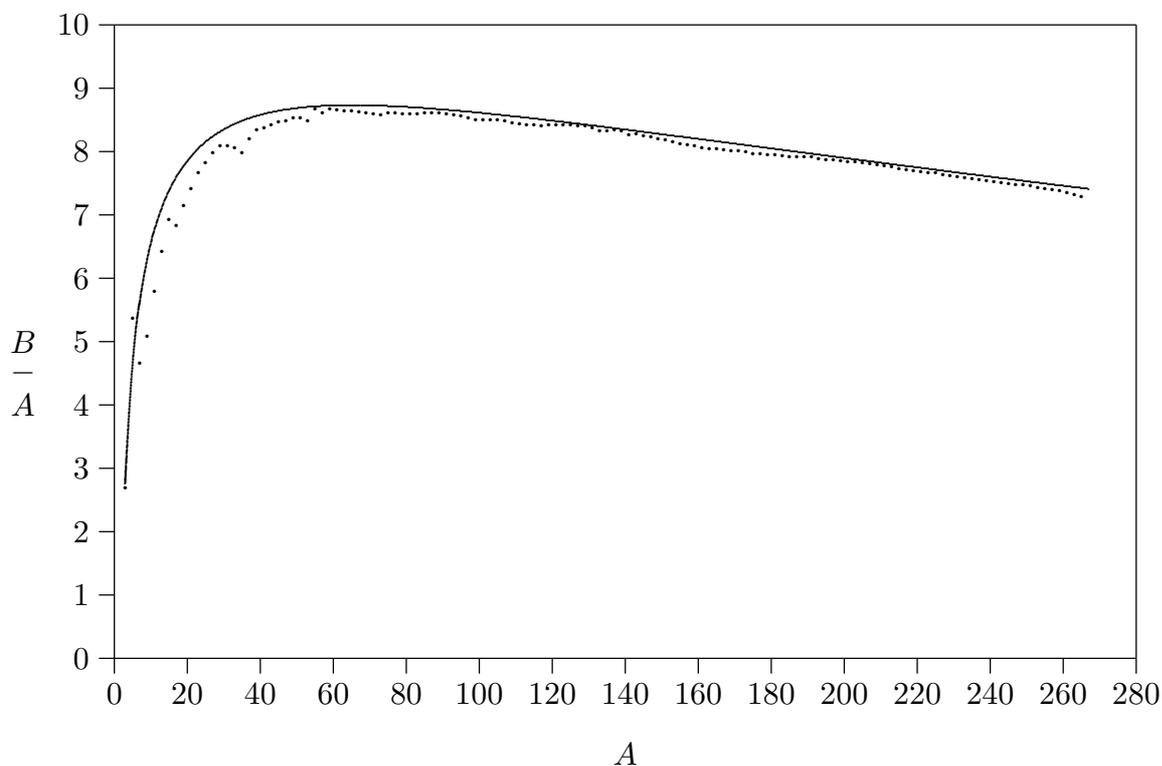


Fig. 4.1 - Valores experimentais médios de B/A para núcleos de A -ímpar, e a curva correspondente calculada pelas equações (4.2) e (4.6).

A figura 4.1 mostra a comparação da equação (4.2) com dados experimentais para núcleos ímpares. Para $A < 20$ não há boa concordância com a experiência. Isso é esperado, já que núcleos leves não são tão análogos a uma gota líquida.

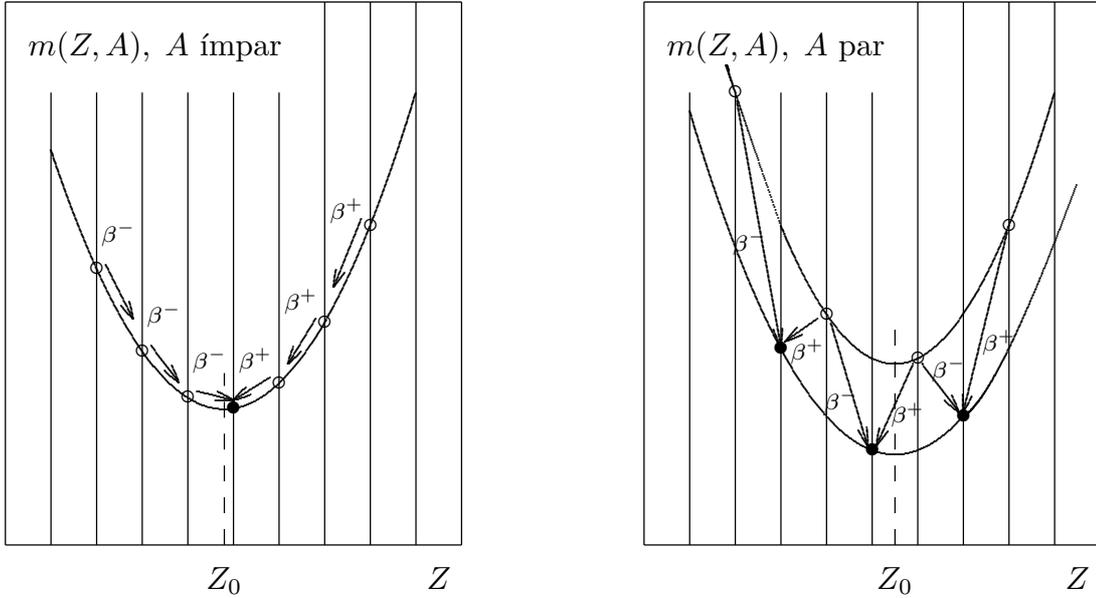


Fig. 4.2 - Massa de núcleos de um dado A . Os núcleos estáveis são representados por círculos cheios.

A equação (4.3) nos permite deduzir propriedades importantes. Observe que essa equação é quadrática em Z . Para núcleos ímpares ela representa uma parábola, vista na figura 4.2.

Para A par, obtemos duas parábolas devido à energia de emparelhamento $\pm\delta$. Núcleos com Z vizinhos podem decair um no outro por emissão de uma partícula β^+ (pósitron) ou β^- (elétron). Da figura 4.2 vemos que para um núcleo com A ímpar só existe um isóbar estável, enquanto para A par inúmeros isóbaros estáveis são possíveis.

Fixando o valor de A , o número de prótons Z_0 para o qual $m(Z, A)$ é mínimo é obtido de

$$\left| \frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const}} = 0. \quad (4.5)$$

De (4.3) obtemos

$$Z_0 = \frac{A}{2} \left(\frac{m_n - m_p + a_A}{a_C A^{2/3} + a_A} \right) = \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (4.6)$$

Vemos de (4.6) que a estabilidade é conseguida com $Z_0 < A/2$, ou seja, com um número de nêutrons maior do que o número de prótons. Sabemos que isso de fato ocorre e a figura 4.3 mostra que a linha de estabilidade obtida de (4.6) acompanha perfeitamente a faixa de núcleos estáveis.

Da equação (4.3) podemos também perguntar se um dado núcleo é instável ou não pela emissão de uma partícula- α . Para isso é necessário que

$$E_\alpha = [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha]c^2 > 0, \quad (4.7)$$

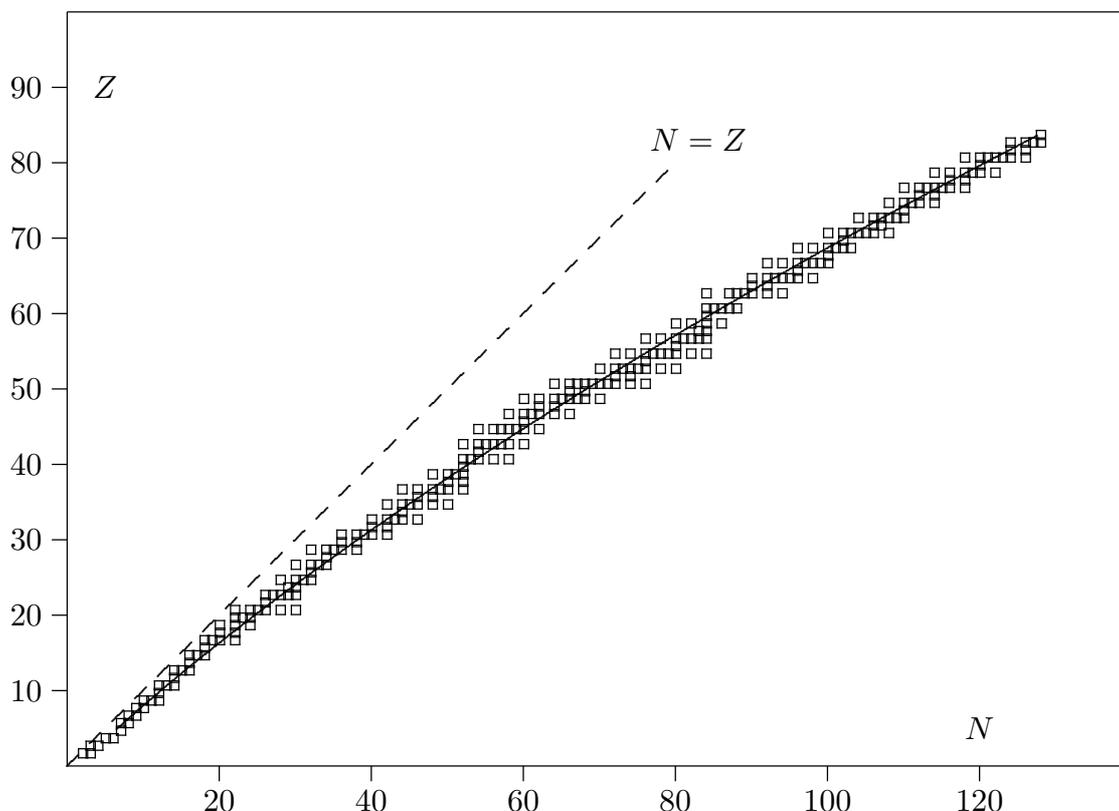


Fig. 4.3 - Localização dos núcleos estáveis no plano N-Z. A linha cheia é a curva de Z_0 contra $N = A - Z_0$, obtida da equação (4.6).

o que ocorre para $A \gtrsim 150$. Também podemos verificar a possibilidade de um núcleo pesado fissionar, ou seja, de se partir em dois pedaços aproximadamente iguais. Isso será possível desde que

$$E_f = [m(Z, A) - 2m(Z/2, A/2)]c^2 > 0, \quad (4.8)$$

relação que vale para $A \gtrsim 90$.

O modelo da gota líquida descreve bem o comportamento médio das energias de ligação com o número de massa mas nada tem a dizer sobre efeitos localizados como, por exemplo, a existência de números mágicos de núcleons. Na figura 4.4 é plotada a diferença entre a energia de separação de um nêutron (veja eq. 3.10) experimental e a calculada pelo modelo da gota líquida para cerca de 2000 nuclídeos. É notória a existência de valores de N onde a diferença é positiva e cai abruptamente, tornando-se negativa. Vemos que esses valores são os números mágicos, que aparecem em vários outros experimentos de natureza diferente. A presença desses números é reveladora de

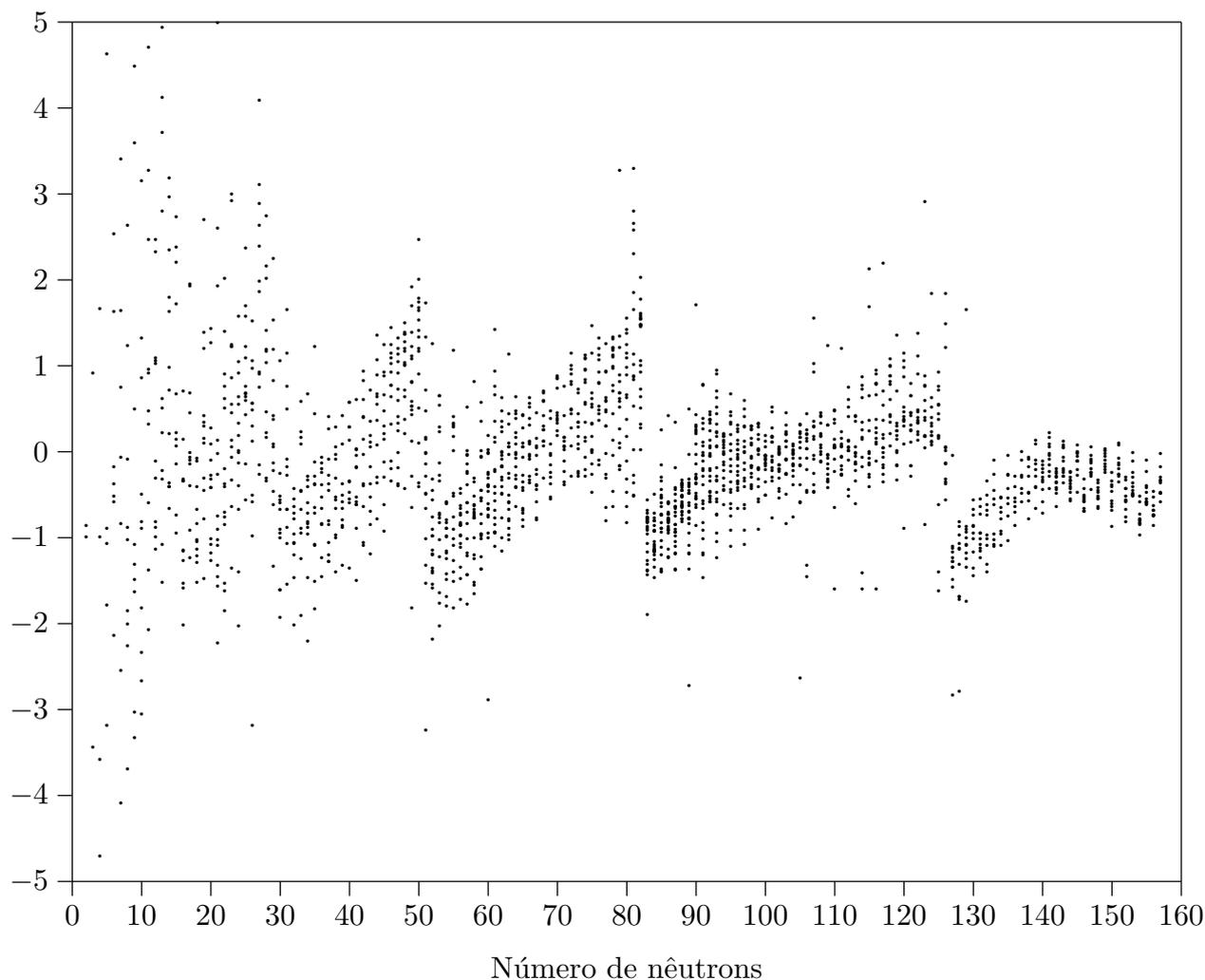


Fig. 4.4 - Diferença (em MeV) entre a energia de separação experimental e a calculada pelo modelo da gota líquida para cerca de 2000 núclídeos.

uma estrutura de camadas que não pode ser obtida do modelo. Veremos nas seções seguintes que modelos que tratam o núcleo como um sistema quântico são os únicos aptos a dar uma justificativa para a existência dessas estruturas.

4.3 - O Modelo do Gás de Fermi

Esse modelo, bastante simples em sua estrutura, baseia-se no fato de que os núcleons se movimentam quase que livremente no interior do núcleo devido ao Princípio de Pauli. Não podendo dois deles ocupar um mesmo estado de energia, eles se deslocam sem colidir, pois todos os possíveis estados finais que poderiam ser ocupados já estão preenchidos por outros núcleons. Mas quando um núcleon se aproxima da superfície e tenta se afastar do núcleo, ele sofre uma força de atração dos núcleons que ficaram para trás, o que o força a retornar para o interior. No interior do núcleo ele sofre as forças de atração de

todos os núcleons que estão à sua volta, o que conduz a uma força resultante aproximadamente igual a zero. Podemos imaginar o núcleo como sendo um balão, dentro do qual os núcleons se movem livremente, mas ocupando estados de energia diferentes (figura 4.5).

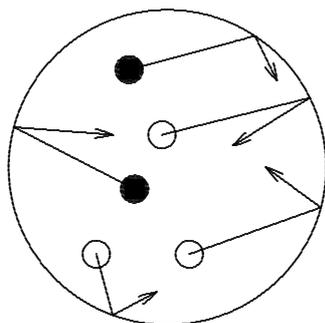


Fig. 4.5 - Representação do núcleo como um gás de Fermi.

Os núcleons no modelo do gás de Fermi obedecem à equação de Schrödinger para a partícula livre,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = E\Psi, \quad (4.9)$$

onde m é a massa do núcleon e E a sua energia. Para simplificar vamos supor que em vez de uma esfera, a região à qual os núcleons estão limitados é o interior de um cubo. Os resultados finais de nosso cálculo serão independentes dessa hipótese. Desse modo, Ψ terá que satisfazer as condições de contorno

$$\Psi(x, y, z) = 0 \quad (4.10)$$

para

$$x = 0, y = 0, z = 0 \quad \text{e} \quad x = a, y = a, z = a,$$

onde a é o lado do cubo. A solução de (4.9) e (4.10) é dada por

$$\Psi(x, y, z) = A \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z) \quad (4.11)$$

desde que

$$k_x a = n_x \pi, \quad k_y a = n_y \pi \quad \text{e} \quad k_z a = n_z \pi, \quad (4.12)$$

onde n_x, n_y e n_z são inteiros positivos e A é uma constante de normalização. Para cada conjunto (n_x, n_y, n_z) temos uma energia

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2, \quad (4.13)$$

onde $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$.

As equações (4.12) e (4.13) representam a quantização de uma partícula em uma caixa, onde $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ é o momento (dividido por \hbar) da partícula na caixa. Devido ao Princípio de Pauli um dado momento só pode ser ocupado por no máximo quatro núcleons: dois prótons com spins opostos e dois nêutrons com spins opostos. Considere o espaço de vetores \mathbf{k} ; em virtude de (4.13), para cada cubo de lado π/a existe, nesse espaço, somente um ponto que representa uma solução possível na forma (4.11). O número de soluções possíveis (veja figura 4.6) $n(k)$ com a magnitude de \mathbf{k} entre k e $k + dk$ é dada pela razão entre o volume da fatia esférica assinalada na figura e o volume $(\pi/a)^3$ por solução permitida no espaço- \mathbf{k} :

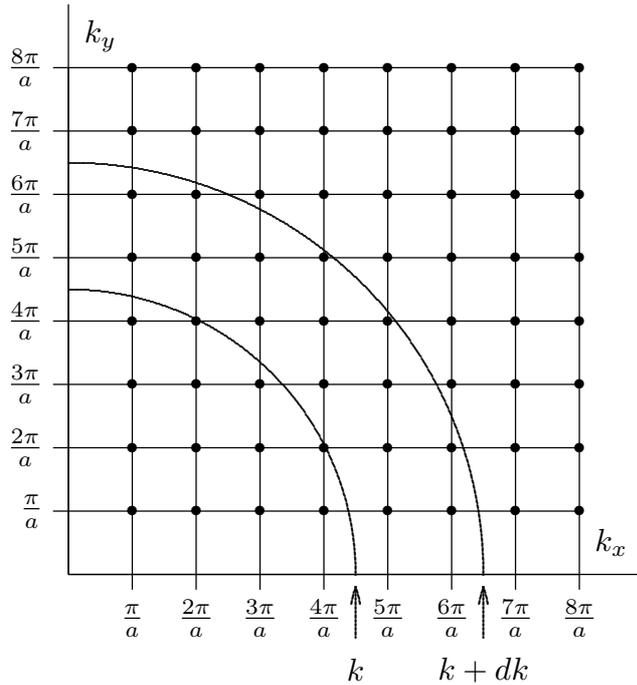


Fig. 4.6 - Estados permitidos do espaço de momentos contidos no plano $k_x k_y$. Cada estado é representado por um ponto do reticulado.

$$dn(k) = \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk \frac{1}{(\pi/a)^3}, \quad (4.14)$$

onde $4\pi k^2 dk$ é o volume de uma caixa esférica no espaço- \mathbf{k} com raio entre k e $k + dk$. Somente 1/8 da casca é considerado já que somente valores positivos de k_x, k_y e k_z são necessários para contarmos todos os estados com auto-funções definidas por (4.11).

Com o auxílio de (4.13) podemos fazer aparecer explicitamente a energia em (4.14):

$$dn(E) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} a^3}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE. \quad (4.15)$$

O número total de estados possíveis do núcleo se obtém integrando-se (4.15) de 0 ao valor mínimo necessário para incluir todos os núcleons. Esse valor, E_F é chamado de *energia de Fermi*. Assim, obtemos

$$n(E_F) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} a^3}{3\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2} = \frac{A}{4}, \quad (4.16)$$

onde a última igualdade se deve ao fato de um dado estado poder ser ocupado por quatro núcleons, dois prótons e dois nêutrons com spins opostos. Invertendo (4.16) obtemos

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{2/3}, \quad (4.17)$$

onde $\rho = A/a^3$. Supomos ser a energia máxima a mesma para ambos os núcleons, o que significa termos quantidades iguais de prótons e nêutrons. Caso isso não seja verdade, as energias de Fermi para prótons e nêutrons serão diferentes. Se $\rho_p = Z/a^3$ e $\rho_n = N/a^3$ são a densidade de prótons e a densidade de nêutrons, respectivamente, teremos

$$E_F(p) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho_p)^{2/3}, \quad (4.18)$$

e

$$E_F(n) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho_n)^{2/3}, \quad (4.19)$$

para as energias de Fermi correspondentes.

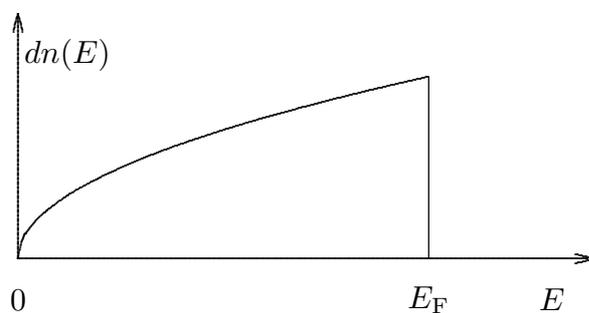


Fig. 4.7 - Distribuição de Fermi para $T = 0$.

O número de núcleons com energia entre E e $E + dE$, dado por (4.15) é plotado na figura (4.7) em função de E . Essa distribuição de partículas se denomina *distribuição de Fermi* para $T = 0$, que é caracterizada pela ausência de qualquer partícula com $E > E_F$. Isso corresponde ao estado fundamental do núcleo. Um estado excitado ($T > 0$) pode ser construído pela passagem de um núcleon a um estado acima do nível de Fermi, deixando uma vaga (buraco) em seu estado de energia ocupado anteriormente.

Se utilizarmos $\rho = 1,72 \times 10^{38}$ núcleons/cm³ = 0,172 núcleons/fm³, que é a densidade aproximada para todo núcleo com $A \gtrsim 12$, obtemos

$$k_F = \frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar} = 1,36 \text{ fm}^{-1}, \quad (4.20)$$

o que corresponde a

$$E_F = 37 \text{ MeV}. \quad (4.21)$$

Sabemos que a energia de separação de um núcleon é da ordem de 8 MeV. Assim, os núcleons não estão no interior de um poço com paredes infinitas como supusemos, porém em um poço com profundidade $V_0 \cong (37+8) \text{ MeV} = 45 \text{ MeV}$ (figura 4.8a)

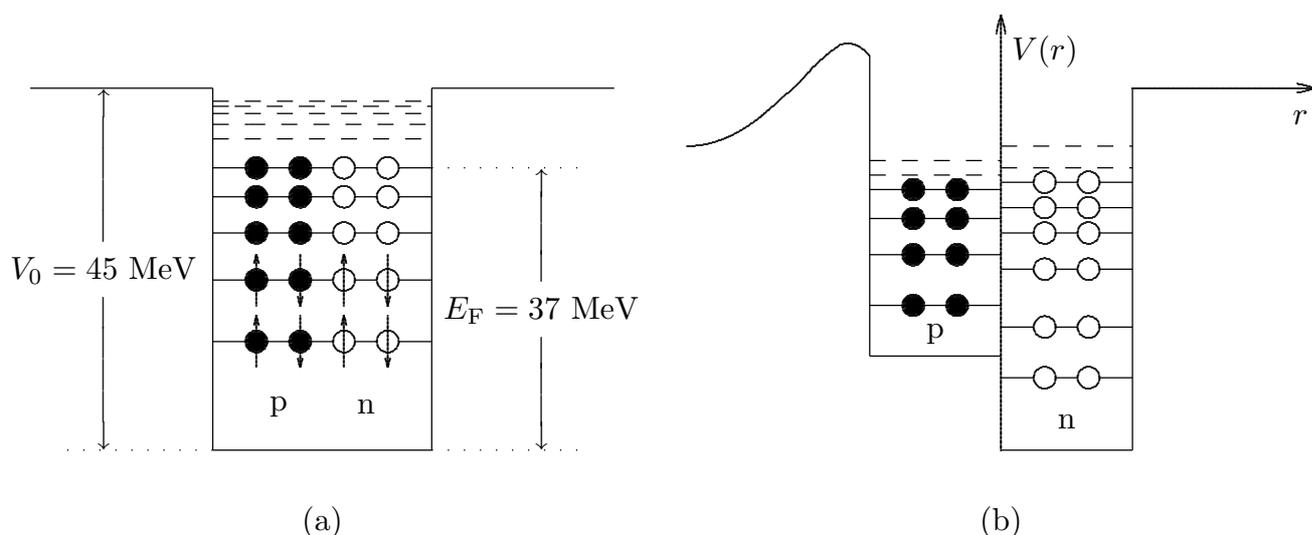


Fig. 4.8 - (a) Poço de potencial e estados de um Gás de Fermi para $T = 0$. (b) Quando se leva em conta a força coulombiana os potenciais sentidos por prótons e nêutrons são diferentes e podemos imaginar um poço para cada tipo de núcleon. Em dois dos níveis são mostrados os spins associados a cada núcleon.

Estamos agora em condições de explicar a origem do termo de assimetria, equação (4.1d), do modelo da gota líquida. Imaginemos o núcleo como a adição de um gás de prótons com energia de Fermi $E_F(p)$ a um gás de nêutrons com energia de Fermi $E_F(n)$. Sendo C uma constante, podemos escrever

$$E_F(p) = C(Z/A)^{2/3} \quad E_F(n) = C(N/A)^{2/3}. \quad (4.22)$$

Se dn é o número de partículas com energia entre E e $E + dE$, a energia total E_T do gás se escreve

$$\begin{aligned} E_T &= \int_0^{E_F} E dn = \frac{3}{5} Z E_F(p) && \text{para os prótons e} \\ &= \frac{3}{5} N E_F(n) && \text{para os nêutrons,} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde foi utilizada a equação (4.15). Sendo C' uma nova constante, podemos escrever a energia total

$$E(Z, A) = C' A^{-2/3} (Z^{5/3} + N^{5/3}), \quad (4.24)$$

com a condição de contorno $Z + N = A$. O mínimo da energia (4.24) ocorre quando $Z = N = A/2$. Chamando de $E(Z, A)_{\min}$ esse valor, calculemos

$$\Delta E = E(Z, A) - E(Z, A)_{\min} = C' A^{-2/3} \left[N^{5/3} + Z^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (4.25)$$

Definamos $D = \frac{N-Z}{2} = N - A/2 = A/2 - Z$; temos

$$\Delta E = C' A^{-2/3} \left[\left(\frac{A}{2} + D \right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} - D \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (4.26)$$

Expandindo $(D + A/2)^{5/3}$ e $(-D + A/2)^{5/3}$ numa série de Taylor

$$f(x+a) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{2} f''(a) + \dots, \quad (4.27)$$

obtemos

$$\Delta E = \frac{10}{9} C' \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \dots \quad (4.28)$$

Vemos que o desbalanceamento entre o número de prótons e o de nêutrons aumenta a energia do sistema (diminuindo a energia de ligação) da quantidade estipulada por (4.28). Isso justifica a existência do termo de assimetria

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \quad (4.1d)$$

no modelo da gota líquida.

Apesar de sua simplicidade o modelo do gás de Fermi consegue explicar muitas das propriedades nucleares que expusemos no capítulo anterior. De início, a forma de

preenchimento dos estados indica que, em um núcleo leve, $Z \cong N$ já que desse modo se consegue a energia mais baixa. Para núcleos pesados a força coulombiana faz com que o poço de prótons seja algo mais raso que o de nêutrons; em conseqüência, o número de prótons fica menor do que o de nêutrons, o que sabemos ocorrer na prática (veja figura 4.8b). Outra característica explicada é a abundância que se constata de nuclídeos par-par contra a quase inexistência de nuclídeos ímpar-ímpar estáveis e é fácil ver porque isso ocorre: quando temos um núcleon isolado em um nível, o estado de energia mais baixo que se consegue para um próximo núcleon é naquele mesmo nível. Em outras palavras: em um núcleo ímpar-ímpar temos um próton e um nêutron isolados, cada qual em poço de potencial. Mas, entre esses estados há, geralmente, uma diferença de energia, criando a possibilidade da passagem de um dos núcleons para o poço do outro através de uma emissão β e, assim, o núcleo deixa de ser estável.

Finalmente, devemos nos lembrar que estamos tratando de um modelo de partícula independente e os resultados acima prenunciam o sucesso da aplicação dessa idéia a modelos mais sofisticados, como o modelo de camadas, que estudaremos a seguir.

4.4 - O Modelo de Camadas

Esse modelo admite que os núcleons se movem de forma mais ou menos independente uns dos outros dentro do núcleo, no mesmo espírito do modelo do gás de Fermi. A diferença é que agora os núcleons não são tratados como partículas livres mas sujeitos a um potencial central, à semelhança do potencial central nuclear que atua sobre os elétrons no átomo. A idéia aqui é, à primeira vista, estranha, pois não se pode, como no caso atômico, identificar o agente criador de um tal potencial. Essa dificuldade é contornada supondo que cada núcleon se move em um potencial médio criado pelos demais núcleons, potencial esse que deve ser determinado de modo a melhor reproduzir resultados experimentais.

As primeiras propostas sobre o modelo surgiram ao final da década de 20 motivadas pelas flutuações na abundância relativa e nas massas dos nuclídeos ao longo da tabela periódica. No entanto, a falta de uma aparente base teórica e a pouca aceitação da idéia de um movimento independente de núcleons, ao lado dos poucos resultados iniciais, fizeram com que o modelo levasse muito tempo para se implantar, até que, finalmente, a introdução de um termo de acoplamento spin-órbita, em 1949, estabeleceu de forma definitiva o modelo de camadas como uma importante ferramenta de vasta utilização na física nuclear.

Vamos explicitar a idéia do modelo de camadas de uma maneira mais formal. A Hamiltoniana exata de um problema de A corpos pode ser escrita como

$$H = \sum_i^A T_i(\mathbf{r}_i) + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad (4.29)$$

sendo T o operador de energia cinética e V a função potencial.

Se nos restringirmos a interações a dois corpos (i.e., núcleon-núcleon), (4.29) assume a forma

$$H = \sum_i^A T_i(\mathbf{r}_i) + \sum_i \sum_{j<i} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j). \quad (4.30)$$

Na proposta do modelo o núcleon i sente não o potencial $\sum V_{ij}$ mas sim um potencial central $U(r_i)$, que só depende das coordenadas do núcleon i . Esse potencial pode ser introduzido em (4.30), com o resultado

$$H = \sum_i^A T_i(\mathbf{r}_i) + \sum U(r_i) + H_{\text{res}} \quad (4.31a)$$

$$H_{\text{res}} = \sum_i \sum_{j<i} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i U(r_i). \quad (4.31b)$$

H_{res} se refere às chamadas *interações residuais*, isto é, à parte do potencial V não abrangida pelo potencial central U . A esperança do modelo de camadas é que a contribuição de H_{res} seja pequena ou, de outra forma, que a *Hamiltoniana do modelo de camadas*,

$$H_0 = \sum_{i=1}^A [T_i(r_i) + U(r_i)], \quad (4.32)$$

represente com boa aproximação a expressão exata H . Logo adiante veremos que parte da exatidão perdida quando se passa de (4.30) para (4.32) pode ser recuperada por um tratamento aproximado do efeito da interação residual H_{res} .

As soluções $\Psi_1(\mathbf{r}_1), \Psi_2(\mathbf{r}_2), \dots$, da equação

$$H_0\Psi = E\Psi, \quad (4.33)$$

com auto-valores respectivos E_1, E_2, \dots , são chamadas *órbital*s ou *orbitais* e na prescrição do modelo de camadas os A núcleons preenchem os orbitais de energias mais baixas de forma compatível com o Princípio de Pauli. Assim, se o sub-índice 1 de Ψ_1 , que representa o conjunto de números quânticos do orbital 1, incluir spin e isospin, podemos dizer que um primeiro núcleon é descrito por $\Psi_1(\mathbf{r}_1), \dots$, o A -ésimo por $\Psi_A(\mathbf{r}_A)$. A função de onda

$$\Psi = \Psi_1(\mathbf{r}_1)\Psi_2(\mathbf{r}_2)\dots\Psi_A(\mathbf{r}_A) \quad (4.34)$$

é solução da equação (4.33) com auto-valores

$$E = E_1 + E_2 + \dots E_A \quad (4.35)$$

e seria, em princípio, a função de onda do núcleo, com energia E , dada pelo modelo de camadas. Devemos ter em mente, no entanto, que estamos lidando com uma assembléia de férmions e que a função de onda total deve ser antissimétrica para uma troca de todas as coordenadas de dois núcleons. Uma tal função de onda é obtida a partir de (4.34) pela construção do *determinante de Slater*

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}_1) & \Psi_1(\mathbf{r}_2) & \dots & \Psi_1(\mathbf{r}_A) \\ \Psi_2(\mathbf{r}_1) & \Psi_2(\mathbf{r}_2) & \dots & \Psi_2(\mathbf{r}_A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_A(\mathbf{r}_1) & \Psi_A(\mathbf{r}_2) & \dots & \Psi_A(\mathbf{r}_A) \end{vmatrix}, \quad (4.36)$$

onde a troca de coordenadas (ou dos números quânticos) de dois núcleons troca o sinal do determinante.

Um inconveniente da construção (4.36) é que a função Ψ , por misturar orbitais de momento angular J e spin isotópico $T^{(*)}$ bem definidos, não é mais auto-função desses operadores. A saída para essa dificuldade envolve a construção de combinações lineares de determinantes de Slater que sejam auto-funções de J e T . Esse problema tem solução conhecida mas envolve uma grande quantidade de cálculos. É bom deixar claro, no entanto, que muitas das propriedades dos estados nucleares podem ser extraídas do modelo de camadas sem o conhecimento da função de onda, como veremos a seguir.

Vamos analisar o que se obtém quando se parte de potenciais $U(r)$ (eq. 4.32) com soluções conhecidas. Examinemos inicialmente o oscilador harmônico simples. Sendo um potencial que cresce sempre com a distância, ele, em princípio, não seria adequado para representar o potencial nuclear, que se anula quando o núcleon está a uma distância maior do que o raio do núcleo. É de se esperar, contudo, que isso não seja muito importante quando analisamos apenas os estados ligados do núcleo. O potencial do oscilador tem a forma

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad (4.37)$$

onde a freqüência ω deve se adequar ao número de massa A (ver apêndice B). Procuraremos soluções de (4.37) do tipo

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.38)$$

onde a substituição de Ψ na equação de Schrödinger para uma partícula reduz a solução de (4.38) à solução de uma equação para u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u = 0. \quad (4.39)$$

(*) A descrição do spin isotópico de um orbital será feita na próxima seção.

A solução de (4.39) com o potencial (4.37) é

$$u_{nl}(r) = N_{nl} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu r^2\right) r^{l+1} \mathcal{V}_{nl}(r), \quad (4.40)$$

onde $\nu = m\omega\hbar$ e $\mathcal{V}_{nl}(r)$ é o polinômio associado de Laguerre

$$\mathcal{V}_{nl}(r) = L_{n+l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\nu r^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 2^k \binom{n-1}{k} \frac{(2l+1)!!}{(2l+2k+1)!!} (\nu r^2)^k, \quad (4.41)$$

sendo $L_k^\alpha(t)$ soluções da equação

$$t \frac{d^2 L}{dt^2} + (\alpha + 1 - t) \frac{dL}{dt} + kL = 0. \quad (4.42)$$

Da condição de normalização

$$\int_0^\infty u_{nl}^2(r) dr = 1 \quad (4.43)$$

obtemos que

$$N_{nl}^2 = \frac{2^{l-n+3} (2l+2n-1)!!}{\sqrt{\pi} (n-1)! [(2l+1)!!]^2} \nu^{l+\frac{3}{2}}. \quad (4.44)$$

Os autovalores da energia correspondentes à função de onda $\Psi_{nlm}(\mathbf{r})$ são

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + l - \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\Lambda + \frac{3}{2}\right) = E_\Lambda, \quad (4.45)$$

onde

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad \Lambda = 2n + l - 2. \quad (4.46)$$

Para cada valor de l existem $2(2l+1)$ estados com a mesma energia (estados degenerados). O fator 2 é devido aos dois estados de spin. Entretanto, os autovalores que correspondem ao mesmo valor de $2n + l$ (mesmo valor de Λ) também são degenerados. Como $2n = \Lambda - l + 2 = \text{par}$, um dado valor de Λ corresponde aos autoestados degenerados

$$(n, l) = \left(\frac{\Lambda+2}{2}, 0\right), \left(\frac{\Lambda}{2}, 2\right), \dots, (2, \Lambda-2), (1, \Lambda) \quad (4.47a)$$

para Λ par e

$$(n, l) = \left(\frac{\Lambda + 1}{2}, 1 \right) \left(\frac{\Lambda - 1}{2}, 3 \right), \dots, (2, \Lambda - 2), (1, \Lambda) \quad (4.47b)$$

para Λ ímpar.

Obtemos então que o número de nêutrons ou prótons com autovalores E_Λ é dado por (usaremos $l = 2k$ ou $2k + 1$, no caso de Λ ser par ou ímpar)

$$N_\Lambda = \sum_{k=0}^{\Lambda/2} 2[2(2k) + 1], \quad \text{para } \Lambda \text{ par} \quad (4.48a)$$

$$N_\Lambda = \sum_{k=0}^{\Lambda-1/2} 2[2(2k + 1) + 1], \quad \text{para } \Lambda \text{ ímpar.} \quad (4.48b)$$

Em ambos os casos, o resultado é

$$N_\Lambda = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2). \quad (4.49)$$

O número quântico Λ define uma *camada* e cada camada pode alojar N_Λ prótons e N_Λ nêutrons.

O número acumulado de partículas para todos os níveis até Λ é

$$\sum_{\Lambda} N_\Lambda = \frac{1}{3}(\Lambda + 1)(\Lambda + 2)(\Lambda + 3). \quad (4.50)$$

Os níveis previstos pelo oscilador harmônico são dados na tabela 4.1. Podemos observar que as camadas fechadas aparecem em 2, 8 e 20, estando em acordo com a evidência experimental, pois o núcleo deveria fechar suas camadas (de prótons e de nêutrons) com um número mágico (ver final da seção 3.3). O mesmo não acontece, porém, nas camadas fechadas para número de núcleons maiores do que 20, que estão em desacordo com a experiência.

$\Lambda =$ $2n + l - 2$	$E/\hbar\omega$	l	Estados	$N_\Lambda = n^\circ$ de nêutrons (prótons)	Total
0	3/2	0	1s	2	2
1	5/2	1	1p	6	8
2	7/2	0,2	2s,1d	12	20
3	9/2	1,3	2p,1f	20	40
4	11/2	0,2,4	3s,2d,1g	30	70
5	13/2	1,3,5	3p,2f,1h	42	112
6	15/2	0,2,4,6	4s,3d,2g,1i	56	168

Tab. 4.1 - Distribuição de núcleons pelas primeiras camadas de um oscilador harmônico simples. A última coluna indica o número total de nêutrons (ou prótons) até aquela camada.

Para um poço quadrado infinito temos aproximadamente a mesma situação. As soluções para esse potencial obedecem à equação

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0. \quad (4.51)$$

cujas soluções

$$u = A r j_l(kr) \quad (4.52)$$

envolvem funções de Bessel esféricas que devem obedecer à condição de contorno

$$j_l(kR) = 0, \quad (4.53)$$

onde R é o raio do núcleo e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. De (4.52) e (4.53) podemos construir os estados permitidos para esse potencial. A tabela 4.2 mostra esses estados, o número de núcleons admitido em cada um deles e os números de núcleons que fecham camadas. Novamente aqui os números mágicos são reproduzidos apenas nas camadas iniciais.

Órbita : nl	kR	$2(2l + 1)$	Total
1s	3.142	2	2
1p	4.493	6	8
1d	5.763	10	18
2s	6.283	2	20
1f	6.988	14	34
2p	7.725	6	40
1g	8.183	18	58
2d	9.095	10	68
3s	9.425	2	70

Tab. 4.2 - Distribuição de prótons (ou nêutrons) pelas primeiras camadas de um poço quadrado infinito. O número quântico principal n indica a ordem em que aparece um zero para um dado l em (4.53). Note que aqui não há mais degenerescência em l . A terceira coluna dá o número de prótons e neutrons que podem ser acomodados em cada órbita.

O potencial nuclear deve ter, na verdade, uma forma intermediária entre o oscilador e o poço quadrado, não subindo tão suavemente quanto o primeiro nem tão abruptamente quanto o segundo. É usual empregar-se a forma de “Woods-Saxon” $V = V_0/\{1 + \exp[(r - R)/a]\}$, onde V_0 , r e a são parâmetros ajustáveis. Uma solução numérica da equação de Schrödinger com um tal potencial não nos fornece, contudo, os resultados que esperamos.

Uma melhora considerável foi conseguida por M. Mayer [Ma49] e, independentemente, por O. Haxel, J.Jensen e H.Suess [Ha49], em 1949, com a introdução de um termo de interação spin-órbita da forma

$$f(r)\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}, \quad (4.54)$$

onde $f(r)$ é uma função radial que deve ser obtida por comparação com a experiência. No entanto, veremos em seguida que sua forma não é importante para o efeito que desejamos.

Um termo spin-órbita já aparece na física atômica como resultado da interação do momento magnético dos elétrons com o campo magnético criado pelo seu movimento orbital. Na física nuclear esse termo tem natureza diferente e está ligado ao termo spin-órbita da interação núcleon-núcleon.

Vamos ver de que modo a adição de um termo como esse ao potencial (4.37) altera os valores das energias. Os novos valores são dados em primeira ordem por:

$$E = \int \Psi^* H \Psi = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega + \alpha \int \Psi^* f(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \Psi, \quad (4.55)$$

onde α é uma constante de proporcionalidade. Se supusermos agora de que o termo spin-órbita é pequeno e que pode ser tratado como uma perturbação, as funções de onda em (4.55) são basicamente as de um potencial central. Lembrando que $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = 1/2(j^2 - l^2 - s^2)$ temos:

$$\begin{aligned} \int \Psi^* \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \Psi &= \frac{l}{2} && \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ \int \Psi^* \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \Psi &= -\frac{1}{2}(l+1) && \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Assim, a interação spin-órbita remove a degenerescência em j e, antecipando que o melhor resultado experimental será conseguido se os orbitais de maior j tiverem a energia rebaixada, admitimos um valor negativo para α , o que nos permite escrever para os incrementos de energia:

$$\Delta E |_{j=l+1/2} = -|\alpha| \langle f(r) \rangle \frac{l}{2}, \quad (4.57)$$

$$\Delta E |_{j=l-1/2} = +|\alpha| \langle f(r) \rangle \frac{1}{2}(l+1). \quad (4.58)$$

A figura 4.9 mostra o esquema de níveis de um potencial central com a introdução do acoplamento spin-órbita. É fácil ver o efeito de (4.57) e (4.58) na distribuição de energia dos níveis. Entendendo agora uma camada como um grupo de níveis de energias próximas, não mais necessariamente associadas a um único número quântico principal do oscilador, obtemos a reprodução perfeita de todos os números mágicos.

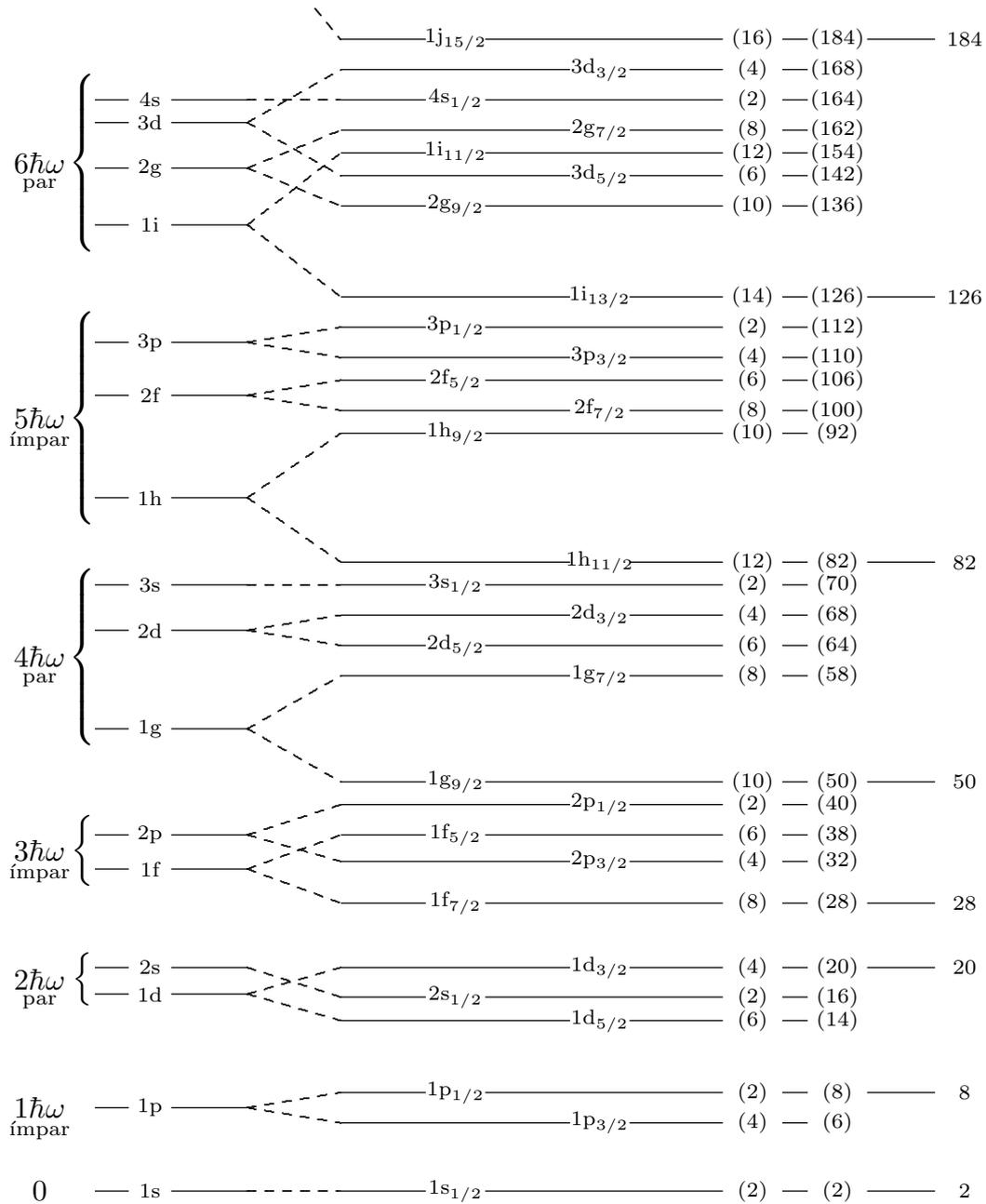


Fig. 4.9 - Esquema de níveis do modelo de camadas mostrando a remoção da degenerescência em j causada pelo termo de interação spin-órbita e o aparecimento dos números mágicos no fechamento de camadas. Os valores entre parênteses indicam o número de núcleons de cada tipo que admite aquele nível e os valores entre colchetes o número total de núcleons de cada tipo até aquele nível. A ordenação dos níveis não é rígida, podendo haver inversões quando se muda a forma do potencial [MJ55].

Vamos agora utilizar esse esquema de níveis^(*) para estabelecer o que se denomina de *modelo de partícula única* ou *modelo de camadas extremo*. Nessa versão, o modelo admite que um núcleo ímpar é composto de um caroço par-par inerte mais um núcleon desemparelhado, e que esse último determina as propriedades do núcleo. Essa idéia já foi exposta na seção 4.6; o que podemos agora é determinar, a partir da figura 4.9, em que estado se encontra o núcleon desemparelhado.

Tomemos como exemplo o ^{17}O . Esse núcleo tem uma camada fechada em 8 prótons mas tem um nêutron sobrando acima do caroço fechado de 8 nêutrons. Um rápido exame da figura 4.9 nos indica que esse nêutron se encontra no nível $1d_{5/2}$. Podemos, de outra forma, dizer que a *configuração* de nêutrons desse núcleo é

$$(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1,$$

ficando evidente que nessa definição se lista os níveis preenchidos pelos nêutrons, com os índices superiores, iguais a $2j + 1$, indicando o número de partículas em cada um deles. É comum também restringir a configuração aos níveis parcialmente preenchidos, ignorando-se as sub-camadas completas. Assim, a configuração de nêutrons do ^{17}O seria $(1d_{5/2})^1$. A previsão do modelo é, nesse caso, a de que o spin do estado fundamental do ^{17}O é $\frac{5}{2}$ e a paridade é positiva ($l = 2$). Essa previsão está de acordo com a experiência. Por razões semelhantes, o modelo prevê ser também o estado fundamental do ^{17}F um estado $\frac{5}{2}^+$ e esse é realmente o valor medido.

O modelo de camadas extremo funciona bem quando temos um núcleon acima de uma camada fechada, como nos exemplos acima. Também funciona bem para um buraco (falta de um núcleon) em uma camada fechada. Exemplos desse caso são os núcleos ^{15}O e ^{15}N para os quais o modelo prevê corretamente um estado fundamental $\frac{1}{2}^-$. Há situações, no entanto, em que o modelo necessita uma certa adaptação. Tal é o caso, por exemplo, dos nuclídeos estáveis ^{203}Tl e ^{205}Tl . Eles têm 81 prótons, existindo, portanto, um buraco em $h_{11/2}$. Seu estado fundamental é, no entanto, $\frac{1}{2}^+$ ao invés de $\frac{11}{2}^-$. Para entendermos o que ocorre é necessário recapitular que o modelo, na forma mais simples em que o estamos empregando, despreza totalmente a interação individualizada dos núcleons; uma correção ao modelo seria levarmos em conta certas interações núcleon-núcleon que sabemos estarem presentes e que são parte da interação residual (4.31b).

Uma classe de interações de interesse especial é a que envolve um par de prótons (ou nêutrons) de órbitas de mesmo n , l e j e com valores de m_j simétricos. Uma colisão dessas partículas pode levar o par a outras órbitas de mesmos números quânticos n , l , j mas com novas projeções m'_j e $-m'_j$. Essas colisões conservam energia (os $2j + 1$ estados de uma mesma sub-camada são degenerados), momento angular e paridade e é de se esperar que haja uma permanente alternância entre os vários valores possíveis do par $m_j, -m_j$. A interação de dois núcleons nessas circunstâncias é comumente chamada de *força de emparelhamento*. Ela conduz a um aumento da energia de ligação do núcleo,

(*) Cada nível da figura 4.9, caracterizado pelos números quânticos n, l, j , comporta $2j + 1$ núcleons de um mesmo tipo e é também referido como uma *sub-camada*.

já que, pertencendo ambos os núcleons a uma mesma órbita, suas funções de onda têm a mesma distribuição espacial e proximidade média entre eles é máxima. Como a força nuclear é atrativa, isso conduz a um aumento na energia de ligação. A força de emparelhamento é responsável pelo termo de emparelhamento 4.1e da fórmula de massa 4.2. É o mesmo tipo de força que, atuando entre os elétrons de condução de um metal, em circunstâncias especiais e em temperaturas muito baixas, produz o fenômeno de supercondutividade [Ba57].

A força de emparelhamento aumenta com o valor de j já que quanto maior for o momento angular, maior será a localização da função de onda do núcleon em torno de uma órbita clássica e mais forte será o argumento do parágrafo anterior. Isso faz com que às vezes seja energeticamente mais vantajoso o núcleon isolado ficar não no último nível, mas abaixo deste, deixando o último nível para um par de núcleons emparelhados. Isso ocorre em nosso exemplo do Tl; o buraco não se situa em $h_{11/2}$ mas em $s_{1/2}$, deixando o orbital $h_{11/2}$ (de alto j) ocupado por um par de prótons. Outro exemplo é o do ^{207}Pb , onde o buraco na camada fechada de 126 nêutrons não está em $i_{13/2}$ mas sim em $p_{1/2}$, resultando em um valor $\frac{1}{2}^-$ para o spin de seu estado fundamental.

Exemplo de outro tipo é o do ^{23}Na . Este nuclídeo apresenta os 3 últimos prótons no orbital $1d_{5/2}$. O valor de seu spin é, no entanto, $\frac{3}{2}$. Esse é um exemplo de uma falha nas previsões do modelo de camadas extremo. Aqui, é o acoplamento entre os três núcleons que determina o valor do spin e não isoladamente o valor de j de cada um deles. Esse tipo de comportamento será analisado na seção seguinte.

Estabelecido o esquema de funcionamento do modelo de camadas é fácil aplica-lo à determinação dos estados excitados dos núcleos. Vejamos o caso do ^{41}Ca (figura 4.10):

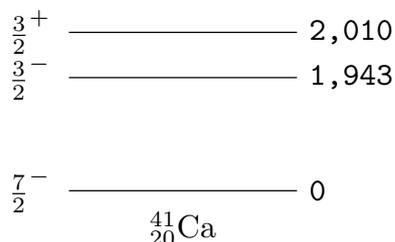


Fig. 4.10 - Esquema de níveis do ^{41}Ca . Os valores à direita são as energias em MeV.

o estado fundamental é um $\frac{7}{2}^-$, já que o nêutron extra ocupa o orbital $f_{7/2}$. O primeiro nível excitado corresponde a um salto desse nêutron para $p_{3/2}$, gerando o estado $\frac{3}{2}^-$. O segundo estado excitado, $\frac{3}{2}^+$, é obtido pela passagem de um nêutron de $1d_{3/2}$ a $1f_{7/2}$, deixando um buraco em $1d_{3/2}$. Deve-se ressaltar, entretanto, que em muito poucos casos o modelo de partícula única consegue fazer uma previsão razoável de spins e energias de estados excitados. Para uma tal finalidade faz-se necessária uma versão mais sofisticada do modelo de camadas, que será exposta na seção seguinte.

Como último tópico desta seção vamos examinar a situação de um núcleo ímpar-ímpar. Nesse caso, dois núcleons, um próton e um nêutron, se encontram desemp-

relhados. Se \mathbf{j}_p e \mathbf{j}_n são os respectivos momentos angulares dos núcleons, o momento angular do núcleo j pode ter valores desde $|j_p - j_n|$ até $j_p + j_n$. L. W. Nordheim propôs, em 1950 [No50], regras para determinar o valor mais provável do spin de um núcleo ímpar-ímpar. Definindo o *número de Nordheim*

$$\mathcal{N} = j_p - l_p + j_n - l_n, \quad (4.59)$$

essas regras estabelecem que:

- a) Se $\mathcal{N} = 0$, $j = |j_p - j_n|$; esta é a chamada *regra forte*.
- b) Se $\mathcal{N} = \pm 1$, $j = j_p + j_n$ ou $j = |j_p - j_n|$, constituindo a *regra fraca*.

As regras de Nordheim revelam uma tendência (não generalizada, pois existem algumas exceções) a um alinhamento dos spins intrínsecos, como no estado $j = 1$ do dêuteron. A tabela 4.3 mostra alguns exemplos práticos.

Núcleo	Próton		Nêutron		\mathcal{N}	j_{prev}	j_{exp}
	Z	Estado	N	Estado			
^{14}N	7	p _{1/2}	7	p _{1/2}	-1	0 ou 1	1+
^{42}K	19	d _{3/2}	23	f _{7/2}	0	2	2-
^{80}Br	35	p _{3/2}	45	p _{1/2}	0	1	1+
^{208}Tl	81	s _{1/2}	127	g _{9/2}	1	4 ou 5	5+

Tab. 4.3 - Determinação do spin de núcleos ímpar-ímpar. A penúltima coluna lista os possíveis valores de j previstos pelas regras de Nordheim e a última os valores experimentais com as respectivas paridades.

4.5 - Extensão do Modelo de Camadas: Contribuição de Mais de Uma Partícula

A receita do modelo de partícula única para a determinação do spin de um núcleo ímpar se resume em afirmar que ele é o valor de j do nível (ou sub-camada) que tem o número ímpar de núcleons. Embora essa idéia funcione bem quando se tem um único núcleon (ou um único buraco) no nível ímpar, ela é muitas vezes equivocada, como no caso do ^{23}Na da seção anterior, quando o nível está parcialmente cheio. Falhas como essa são previstas dada a extrema simplicidade da proposta do modelo de partícula única e um refinamento do modelo pode ser feito tentando de algum modo incluir as interações residuais, ou seja, a parte das interações reais sofridas por um núcleon que não estão representadas no potencial médio (veja eq. 4.31).

Quando temos uma sub-camada incompleta, os estados que se pode formar com os k núcleons que a compõem são degenerados. A presença de forças residuais entre esses

núcleons separa os estados em energia, isto é, a degenerescência é removida. O momento angular de cada estado é um dos valores possíveis que resultam do acoplamento de k momentos angulares \mathbf{j} . O estado fundamental será o de mais baixa energia do grupo e seu momento angular não será necessariamente igual a $j^{(*)}$.

Antes de examinarmos os possíveis valores do momento angular é conveniente discutir sobre a composição do nível de valência. Quando preenchermos os níveis do modelo de camadas colocamos $2j + 1$ prótons em um nível n, l, j e também $2j + 1$ nêutrons, já que o Princípio de Pauli não restringe a presença de núcleons diferentes em um mesmo estado quântico. Podemos, dessa forma, pensar em um “poço de prótons” e um “poço de nêutrons”, preenchidos de forma independente. Quando temos um núcleo pesado, a força de Coulomb faz com que o poço sentido pelos prótons seja mais raso do que o poço dos nêutrons. Temos uma situação semelhante à ilustrada na figura 4.8b para o caso do gás de Fermi. Assim, a camada onde se encontram os últimos prótons e a camada onde se encontram os últimos nêutrons, ambas próximas ao nível de Fermi, podem ser diferentes, correspondendo à funções de onda bastante distintas e de pequena interceptação espacial. É de se esperar que uma interação residual próton-nêutron não seja importante nesse caso. Para núcleos leves, no entanto, o efeito coulombiano é pequeno e a inclusão de interações partícula-partícula deve tratar prótons e nêutrons em um único contexto.

Vamos inicialmente analisar o primeiro caso e imaginar que os k últimos núcleons, digamos, prótons, residam em uma sub-camada definida por n, l, j . A configuração para o poço de prótons teria a forma

$$(n_1 l_1 j_1)^{2j_1+1} (n_2 l_2 j_2)^{2j_2+2} \dots (n l j)^k.$$

Se não levarmos em conta forças de interação os $2j + 1$ estados que compoem o último nível, onde se encontram os k prótons de valência, são degenerados. A presença da interação remove a degenerescência; assim, por exemplo, se tivermos dois prótons ($k = 2$) em um nível de $j = \frac{5}{2}$, podemos armar o quadro mostrado na tabela 4.4. As duas primeiras colunas listam os possíveis valores de m_j das duas partículas permitidos pelo Princípio de Pauli e a última o valor $m_j = m_j(1) + m_j(2)$. Sabemos que os possíveis valores do momento angular resultante se situam na faixa $|j_1 - j_2| < j < j_1 + j_2$, ou seja, j poderia, nesse exemplo, assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Se, no entanto, aceitarmos a regra de que cada valor de m_j da tabela 4.4 é projeção de um único valor de j , veremos que somente os momentos $j = 0, 2$ e 4 podem existir.

A ausência de valores ímpares na soma de momentos angulares de dois núcleons idênticos de mesmo j pode ser demonstrada partindo da expressão (2.21). Aplicada ao caso do parágrafo anterior, (2.21) se escreve

$$\chi_J^M = \sum_m \langle jjmM - m | JM \rangle \chi_j^m(1) \chi_j^{M-m}(2); \quad (4.60)$$

(*) Pode-se mostrar que as forças entre núcleons dentro das camadas fechadas e as que atuam entre os núcleons de valência e as camadas fechadas não modificam a ordenação dos níveis de energia.

m_1	m_2	m	m_1	m_2	m
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-1
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-3
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0			

Tab. 4.4 - Possíveis valores da projeção do momento angular total quando dois núcleons idênticos ocupam o nível $j = \frac{5}{2}$.

Se agora trocarmos as partículas 1 e 2 ficamos com

$$\chi_J^M = \sum_m \langle jjmM - m | JM \rangle \chi_j^m(2) \chi_j^{M-m}(1) \quad (4.61)$$

ou, com a transformação $m' = M - m$,

$$\chi_J^M = \sum_{m'} \langle jjM - m'm' | JM \rangle \chi_j^{m'}(1) \chi_j^{M-m'}(2). \quad (4.62)$$

Usando a propriedade dos coeficientes de Clebsh-Gordan,

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 j_2 m_2 m_1 | jm \rangle, \quad (4.63)$$

(4.62) se escreve

$$\chi_J^M = \sum_{m'} (-1)^{2j-J} \langle jjm'M - m' | JM \rangle \chi_j^{m'}(1) \chi_j^{M-m'}(2) \quad (4.64)$$

e, como $2j$ é ímpar, (4.60) e (4.64) só diferem por um fator $(-1)^{J+1}$. Logo, somente valores pares de J são permitidos por tornarem χ_J^M antissimétrica pela troca dos dois núcleons.

j	k	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	2	0,2
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
	2	0,2,4
	3	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$
$\frac{7}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
	2	0,2,4,6
	3	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}$
	4	0,2(2),4(2),5,6,8
$\frac{9}{2}$	1	$\frac{9}{2}$
	2	0,2,4,6,8
	3	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}(2), \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{21}{2}$
	4	0(2),2(2),3,4(3),5,6(3),7,8(2),9,10,12
	5	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}(2), \frac{7}{2}(2), \frac{9}{2}(3), \frac{11}{2}(2), \frac{13}{2}(2), \frac{15}{2}(2), \frac{17}{2}(2), \frac{19}{2}, \frac{21}{2}, \frac{25}{2}$

Tab. 4.5 - Possíveis valores do momento angular total de k núcleons idênticos situados em uma sub-camada de momento angular j . Os números entre parêntesis indicam o número de vezes que aquele valor se repete.

Quando temos mais de duas partículas em um nível a situação pode se tornar bem mais complexa. O método prático de se encontrar os possíveis valores do momento angular resultante, mostrado na tabela 4.4, pode sempre ser empregado, mas de forma bastante trabalhosa quando temos muitos núcleons. A tabela 4.5 expõe as possibilidades para diversas configurações, onde vemos novas restrições impostas pela antissimetriação, ou, o que é equivalente, pelo Princípio de Pauli, a determinados valores do momento angular total J .

4.6 - Estados Isobáricos Análogos

Vamos agora examinar o caso em que os k núcleons da última sub-camada são uma mistura de prótons e nêutrons. Nessa etapa, o conceito de isospin, introduzido para o núcleon na seção 1.6, será aplicado ao núcleo. Da mesma forma que spins são

adicionados para formar o spin total de um conjunto de núcleons, o isospin de um núcleo é obtido pelo acoplamento dos isospins de cada núcleon. A álgebra para os dois procedimentos é a mesma. Assim, o isospin total de um núcleo é definido por

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^A \mathbf{t}^{(i)}, \quad (4.65)$$

sendo sua componente-z

$$T_3 = \sum_{i=1}^A t_z^{(i)}, \quad (4.66)$$

onde $\mathbf{t}^{(i)}$ e $t_z^{(i)}$ são o isospin do núcleon i e sua componente-3, respectivamente. O isospin faz parte da Hamiltoniana do sistema através do potencial coulombiano

$$\sum_{i<j} V_{ij}^c = \sum_{i<j} \frac{e^2}{r_{ij}} \left(\frac{1}{2} + t_z^{(i)} \right) \left(\frac{1}{2} + t_z^{(j)} \right) \quad (4.67)$$

e é imediato ver que T_3 comuta com $\sum_{i<j} V_{ij}^c$ e, conseqüentemente com H . Sua equação de auto-valores,

$$T_3 \Psi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \right) \Psi = -\frac{1}{2}(N - Z)\Psi, \quad (4.68)$$

mostra que T_3 é uma medida do excesso de nêutrons do núcleo. O operador \mathbf{T}^2 , por sua vez, não comuta com H , pois contém as componentes t_x e t_y que não comutam com t_z , e o isospin total de um núcleo não é conservado. Por outro lado, a energia coulombiana varia com o quadrado da carga e é, portanto, bem menos importante em núcleos leves. Para estes podemos, com uma razoável aproximação, ignorar o termo coulombiano da Hamiltoniana. Com isso H passa a comutar com \mathbf{T}^2 e fica definido um número quântico de isospin T , obtido da equação de auto-valores

$$\mathbf{T}^2 \Psi = T(T + 1)\Psi, \quad (4.69)$$

que se torna mais um identificador de cada estado quântico do núcleo.

Se temos k núcleons em um nível acima de um caroço leve de $Z = N$ podemos formar $k + 1$ núcleos variando o número de nêutrons e prótons no nível. O valor de T para cada núcleo se situa dentro dos limites

$$|T_3| \leq T \leq \frac{k}{2}. \quad (4.70)$$

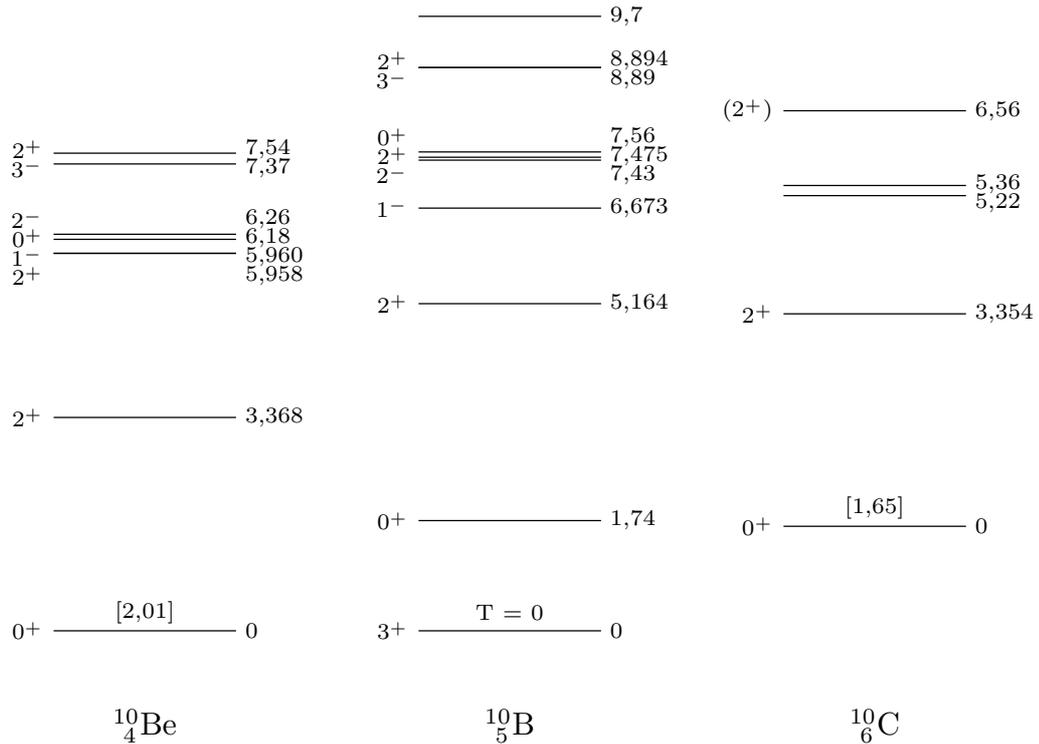


Fig. 4.11 - Estados de $T = 1$ do $^{10}_4\text{Be}$, $^{10}_5\text{B}$ e $^{10}_6\text{C}$, acima do estado fundamental do $^{10}_5\text{B}$ de $T = 0$. O efeito da energia coulombiana (eq. 4.1c) é anulado somando-se seu valor ao da energia de ligação de cada isóbaro. Os valores das energias são dados em MeV [Wa93].

Tomemos como exemplo o caroço mágico $Z = N = 4$ acima do qual colocamos dois núcleons. Podemos formar os núcleos $^{10}_4\text{Be}$, $^{10}_5\text{B}$ e $^{10}_6\text{C}$. Como $k = 2$, T pode assumir os valores 0 e 1. A componente T_3 para cada núcleo tem os valores -1 , 0 e $+1$, respectivamente. A figura 4.11 mostra os diagramas de níveis de cada um desses núcleos. Podemos ver que estados de T igual a 1 formam um triplete com um representante em cada um dos núcleos e estados de $T = 0$ existem somente no ^{10}B , de componente $T_3 = 0$. Os estados que compoem cada triplete têm aproximadamente a mesma energia nos três núcleos e se denominam *estados isobáricos análogos*. Como o efeito da energia coulombiana foi subtraído, esse resultado é mais um indicativo de que as forças nucleares são independentes de carga. Em outras palavras, se as forças nucleares p-p, n-n e p-n são idênticas, sistemas de A núcleons devem ter as mesmas propriedades e, em particular, se descontarmos a força coulombiana, os mesmos níveis de energia. A existência de estados de $T = 0$ do ^{10}B que não têm correspondentes no ^{10}Be e ^{10}C pode ser entendida pelo Princípio de Pauli: o ^{10}B tem cinco pares n-p enquanto o ^{10}Be e ^{10}C têm quatro pares n-p mais um par de núcleos idênticos. Assim, o último par do ^{10}B pode produzir estados não permitidos para o último par do ^{10}Be e ^{10}C .

Nesse ponto convém recordar o estudo que fizemos do dêuteron no capítulo 2 e

observar que o sistemas p-p, n-n e o estado excitado do dêuteron formam um tripleto de estados análogos de $T = 1$ acima do estado fundamental do dêuteron de $T = 0$. Desse ponto de vista fica diretamente justificado não existirem os sistemas p-p e n-n, já que o estado excitado do dêuteron não é ligado.

Um nuclídeo caracterizado por Z e A é também caracterizado pela componente do isospin $T_3 = (Z - A)/2$. O valor do isospin T de um dado estado desse nuclídeo não pode ser menor do que $|T_3|$, já que T_3 é a projeção de \mathbf{T} . Observando-se o exemplo da figura 4.11 vemos que os estados fundamentais têm todos o menor valor possível de T para cada caso, ou seja, $T = |T_3|$. Verifica-se que essa regra funciona bem para todos os núcleos leves.

4.7 - Níveis de Energia com Interação Residual

Estabelecidos os valores possíveis para os momentos angulares dos níveis que se separam pela interação residual, a questão que surge de imediato é saber a localização em energia desses novos níveis. A hipótese do modelo de camadas é, como vimos, supor pequeno o efeito da interação residual e, desse modo, permitir tratar H_{res} em (4.31a) como uma perturbação. A correção na energia E (4.35) é dada em uma teoria de perturbação de primeira ordem por

$$\Delta E = \int \Psi^* H_{\text{res}} \Psi dv, \quad (4.71)$$

ou seja, ΔE é obtido pelo valor esperado da interação residual, calculado com as funções de onda não-perturbadas.

Vejamos como exemplo o caso de duas partículas acima de um caroço fechado. Podemos para esse caso escrever a Hamiltoniana residual (4.31b) como

$$H_{\text{res}} = \sum_{i=3}^A \sum_{i < j=3}^A V_{i,j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_{i=3}^A U(r_i) + \sum_{i=3}^A V_{1,i} - U(r_1) + \sum_{i=3}^A V_{2,i} - U(r_2) + V_{1,2}. \quad (4.72)$$

As duas primeiras parcelas se referem ao caroço fechado e, se admitimos que ele é inerte, elas podem ser ignoradas. Para as quatro parcelas seguintes podemos supor em primeira aproximação que é válida a idéia do modelo, isto é, a interação das partículas 1 e 2 com o caroço é dada pelo potencial médio U . Assim, essas parcelas se anulam e ficamos com

$$H_{\text{res}} = V_{1,2} \quad (4.73)$$

para a aplicação de (4.71).

O potencial $V_{1,2}$ de interação dos núcleons de valência seria, em princípio, o potencial núcleon-núcleon que estudamos no capítulo 2. Esse potencial não é, contudo,

de imediata aplicação quando as partículas estão ligadas ao núcleo pois o Princípio de Pauli modifica de forma drástica o efeito da interação de partículas ligadas. Para se encontrar um potencial núcleon-núcleon que funcione bem no interior do núcleo duas abordagens são usuais. Na primeira tenta-se obter um potencial para núcleons ligados a partir do potencial para núcleons fora do núcleo. Essa abordagem microscópica é de realização muito complicada e de resultados práticos não muito satisfatórios. Na segunda, uma abordagem fenomenológica, é proposta uma forma parametrizada para a interação e os parâmetros determinados por uma comparação com dados experimentais. Outros quesitos que pesam na escolha de um potencial efetivo são a simplicidade do uso e os elementos da física do problema que ela incorpora. Um exemplo é a interação delta de superfície (SDI),

$$V(1, 2) = A\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(|\mathbf{r}_1| - R_0), \quad (4.74)$$

que procura traduzir os fatos de que: 1) a interação é de curto alcance e 2) no interior do núcleo os núcleons são praticamente livres devido à ação do Princípio de Pauli e a interação deve se dar na superfície nuclear de raio R_0 . A presença da função delta torna o cálculo dos elementos de matriz (4.71) bastante simplificado.

Tomemos como exemplo prático o $^{18}_8\text{O}$. Para o modelo de camadas esse núcleo é constituído de um caroço duplamente fechado de 8 prótons e 8 nêutrons e mais dois nêutrons de valência no nível $1d_{5/2}$. De acordo com a tabela 4.5 a interação dos nêutrons vai desmembrar o nível $j = \frac{5}{2}$ em três estados, de $j = 0, 2$ e 4 , todos com spin isotópico $T = 1$ (dois nêutrons) e paridade positiva ($l = 2$). Os níveis correspondentes aparecem no espectro experimental do $^{18}_8\text{O}$ (figura 4.12a).

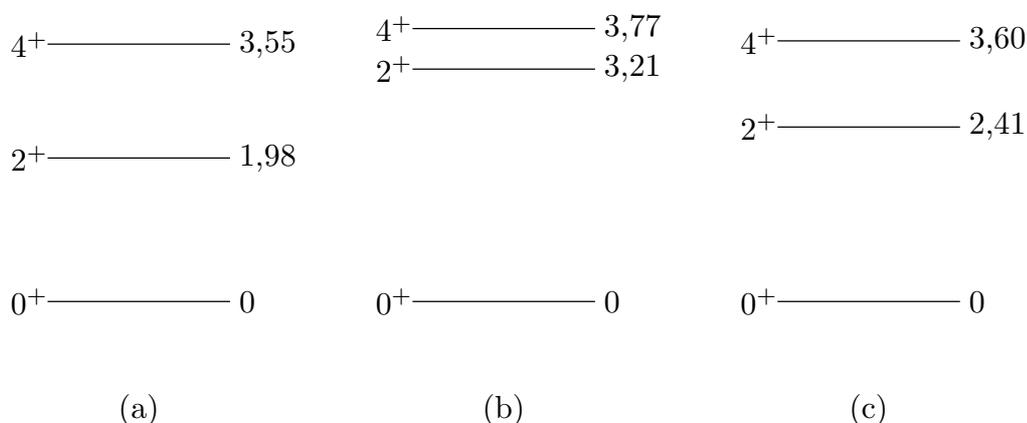


Fig. 4.12 - Estado fundamental e primeiros estados excitados do $^{18}_8\text{O}$: (a) valores experimentais das energias (MeV); (b) calculados com a configuração $1d_{5/2}$; (c) calculados com a mistura das configurações $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$.

Brussaard e Glaudemans [BG77] calcularam os elementos de matriz para esse nuclídeo usando uma interação delta de superfície modificada (MSDI),

$$V(1, 2) = A\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(|\mathbf{r}_1| - R_0) + B[\mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{t}^{(2)}] + C, \quad (4.75)$$

que é obtida da SDI acrescentando-se uma parcela constante e outra com o operador de Heisenberg (2.50), o que aumenta substancialmente o acordo com a experiência. Os parâmetros A , B e C são determinados pela aplicação de (4.75) à determinação de um grande número de energias de ligação e excitação em uma certa região de massas, supondo serem esses parâmetros constantes nessa região. Os valores dos elementos de matriz determinados para os três níveis

$$\begin{aligned} \langle (d_{5/2})^2 | V_{12} | (d_{5/2})^2 \rangle_{J=0, T=1} &= -2,78 \text{ MeV} \\ \langle (d_{5/2})^2 | V_{12} | (d_{5/2})^2 \rangle_{J=2, T=1} &= 0,43 \text{ MeV} \\ \langle (d_{5/2})^2 | V_{12} | (d_{5/2})^2 \rangle_{J=4, T=1} &= 0,99 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (4.76)$$

estabelecem os valores das energias de excitação dos estados 2^+ , $E_{2^+} = 0,43 - (-2,78) = 3,21 \text{ MeV}$ e 4^+ , $E_{4^+} = 0,99 - (-2,78) = 3,77 \text{ MeV}$, que aparecem na parte (b) da figura 4.12. O valor da energia de ligação do ^{18}O pode ser obtido através do valor experimental da energia de ligação do ^{16}O :

$$B(^{18}\text{O}) = B(^{16}\text{O}) + 2S_n(d_{5/2}) - \langle (d_{5/2})^2 | V_{12} | (d_{5/2})^2 \rangle_{J=0}, \quad (4.77)$$

onde S_n é a energia de separação de um nêutron do nível $d_{5/2}$ que pode, por sua vez, ser determinada por (3.10),

$$S_n = B(^{17}\text{O}) - B(^{16}\text{O}), \quad (4.78)$$

a partir dos valores experimentais $B(^{17}\text{O}) = 131,77 \text{ MeV}$ e $B(^{16}\text{O}) = 127,62 \text{ MeV}$. Com esses valores o resultado de (4.77) é $B(^{18}\text{O}) = 138,7 \text{ MeV}$, em bom acordo com o valor experimental $B(^{18}\text{O})_{\text{exp}} = 139,8 \text{ MeV}$.

Os resultados acima foram obtidos supondo os dois nêutrons permanentemente em $1d_{5/2}$, isto é, o *espaço de configuração* se restringiu a essa única configuração. Se compararmos as figuras 4.12 (a) e (b) veremos que as energias de excitação foram determinadas precariamente, não havendo um conjunto de parâmetros que reproduza a distância relativa dos níveis 2^+ e 4^+ . Isso é uma consequência direta da limitação de nosso espaço de configuração e, de fato, não há razão para não admitirmos que os dois nêutrons possam dispendir parte do tempo em outras configurações próximas em energia. Quando levamos em conta um conjunto de configurações possíveis para os núcleons de valência estamos fazendo uma *mistura de configurações* e, com esse recurso, os resultados são substancialmente melhorados. A parte (c) da figura 4.12 mostra os mesmos estados excitados do ^{18}O mas desta vez utilizando a mistura das configurações $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$. O acordo com a experiência é claramente melhor.

Esse recurso tem, no entanto, um preço. À medida que aumentamos o número de configurações, especialmente se são mais de dois os núcleons de valência, temos

que resolver o problema da diagonalização de matrizes de dimensão que pode chegar à casa dos milhares. Isso requer computadores suficientemente rápidos, e o avanço dos cálculos de modelo de camadas tem, de fato, sido condicionado aos avanços da área de informática.

4.8 - Vibrações Nucleares

Passamos, a partir de agora, a estudar modos de excitação coletivos, isto é, que afetam o núcleo como um todo e não apenas alguns poucos núcleons. O modelo desta seção admite que a superfície nuclear possa realizar oscilações em torno de sua forma de equilíbrio à maneira das que podem ocorrer em uma gota. O ponto de partida é dizer que um ponto da superfície do núcleo é agora definido por sua coordenada radial $R(\theta, \phi, t)$, função dos ângulos polar e azimutal e do tempo. Consideremos, por simplicidade, oscilações em torno de uma forma esférica que não alteram o volume e a densidade nuclear; para descrever a forma do núcleo a cada instante será muito conveniente usar a propriedade de que uma função de duas variáveis pode ser expandida em uma série infinita de harmônicos esféricos e escrever:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\mu=+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \right], \quad (4.79)$$

onde a dependência no tempo é transferida para os coeficientes da expansão.

A aplicação de (4.79) a nosso problema impõe, de imediato, condições sobre os possíveis valores de λ . Assim, um rápido exame da equação mostra que o termo $\lambda = 0$ corresponde apenas a uma mudança no raio de uma forma esférica e isso contraria nossa suposição de conservação de volume. Esse termo deve, portanto, ser retirado do somatório. Da mesma forma, os termos com $\lambda = 1$ não interessam à descrição de nosso modelo pois correspondem apenas a um movimento do centro de massa do núcleo. Com efeito, sejam X, Y, Z as coordenadas do centro de massa, que vamos supor fixo na origem. Assim ($dv = d^3r$),

$$X = \int x dv = 0 \quad Y = \int y dv = 0 \quad Z = \int z dv = 0. \quad (4.80)$$

Mas

$$\begin{aligned} X &= \int x dv = \int r \sin\theta \cos\phi r^2 dr d\Omega = \\ &= \int \sin\theta \cos\phi \left(\int_0^R r^3 dr \right) d\Omega = \frac{1}{4} \int R^4 \sin\theta \cos\phi d\Omega. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Da mesma forma,

$$Y = \frac{1}{4} \int R^4 \sin\theta \sin\phi d\Omega \quad \text{e} \quad Z = \frac{1}{4} \int R^4 \cos\theta d\Omega. \quad (4.82)$$

Se admitirmos agora que as oscilações são pequenas comparadas com o raio, podemos escrever:

$$\begin{aligned} R &= R_0[1 + \epsilon(\theta, \phi)] \\ R^4 &= R_0^4(1 + \epsilon)^4 \cong R_0^4(1 + 4\epsilon), \end{aligned} \quad (4.83)$$

logo,

$$\begin{aligned} X = 0 &\rightarrow \int (1 + 4\epsilon)(Y_1^1 + Y_1^{1*}) d\Omega = 0 \\ Y = 0 &\rightarrow \int (1 + 4\epsilon)(Y_1^1 - Y_1^{1*}) d\Omega = 0 \\ Z = 0 &\rightarrow \int (1 + 4\epsilon)Y_1^0 d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Expandamos a primeira equação :

$$\begin{aligned} \int (1 + 4\epsilon)(Y_1^1 + Y_1^{1*}) d\Omega &= \int \left(1 + 4 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu\right) (Y_1^1 + Y_1^{1*}) d\Omega \\ &= \int (Y_1^1 + Y_1^{1*}) d\Omega + 4 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} \left[\int Y_\lambda^\mu (-Y_1^{-1*}) d\Omega + \int Y_\lambda^\mu Y_1^{1*} d\Omega \right] \\ &= 4(\alpha_{11} - \alpha_{1-1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Donde, $\alpha_{11} = \alpha_{1-1}$. Da condição $Y = 0$ se obtém $\alpha_{11} = -\alpha_{1-1}$; logo, $\alpha_{11} = \alpha_{1-1} = 0$. Da condição $Z = 0$ se tira $\alpha_{10} = 0$. Logo, a fixação do centro de massa na origem leva a $\alpha_{11} = \alpha_{10} = \alpha_{1-1} = 0$ o que elimina os termos de $\lambda = 1$ de nossa soma.

Assim, os modos de vibração que nos interessam começam com $\lambda = 2$; são as oscilações de quadrupolo, onde as deformações levam o núcleo a uma forma semelhante a um elipsóide. Para $\lambda = 3$ temos as deformações de octupolo, para $\lambda = 4$ as de hexadecapolo, etc. A figura 4.13 mostra o aspecto dos principais modos de vibração.

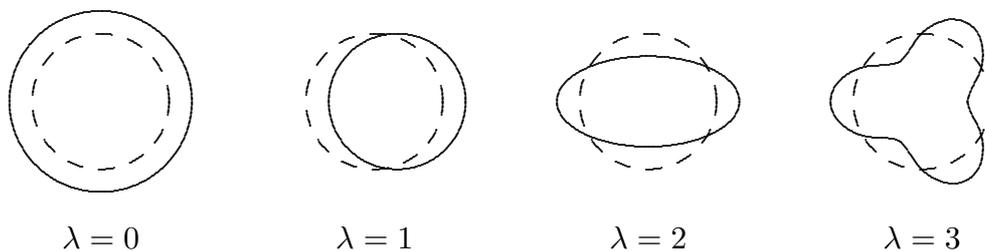


Fig. 4.13 - Os primeiros modos de vibração da superfície nuclear, mostrando a forma do núcleo para cada modo (linha cheia) em relação ao núcleo esférico original.

O problema da energia de uma gota líquida oscilante foi resolvido por Lord Rayleigh em 1877 [Ra877]. Ele considerou o fluido incompressível e irrotacional, e chegou à expressão

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}(t)|^2 \quad (4.86)$$

para a energia cinética, onde

$$B_\lambda = \frac{\rho R_0^5}{\lambda}, \quad (4.87)$$

sendo ρ a densidade. Para a energia potencial resultou um valor

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2, \quad (4.88)$$

com

$$C_\lambda = SR_0^2(\lambda - 1)(\lambda + 2) - \frac{3}{2\pi} \frac{Z^2 e^2}{R_0} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1}, \quad (4.89)$$

onde da primeira parcela do cálculo de Rayleigh se subtraiu a energia coulombiana dos prótons reduzida pela distorção. O fator S é a tensão superficial e pode ser calculado pela fórmula de massa:

$$4\pi R_0^2 S = a_S A^{2/3} \text{ MeV}. \quad (4.90)$$

Para se adaptar o cálculo acima a nosso problema é necessário que escrevamos a Hamiltoniana a partir das expressões clássicas (4.86) e (4.88). Se entendermos os coeficientes $\alpha_{\lambda\mu}$ como coordenadas generalizadas, o momento canonicamente conjugado a $\alpha_{\lambda\mu}$ é

$$P_{\lambda\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}} = B_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda\mu}, \quad (4.91)$$

sendo $\mathcal{L} = T - V$ a Lagrangeana. Assim, a Hamiltoniana se escreve

$$H = T + V = \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2B_\lambda} P_{\lambda\mu}^2 + \frac{1}{2} C_\lambda \alpha_{\lambda\mu}^2 \right), \quad (4.92)$$

que é uma soma de Hamiltonianas de osciladores harmônicos

$$H_{\text{osc}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2, \quad (4.93)$$

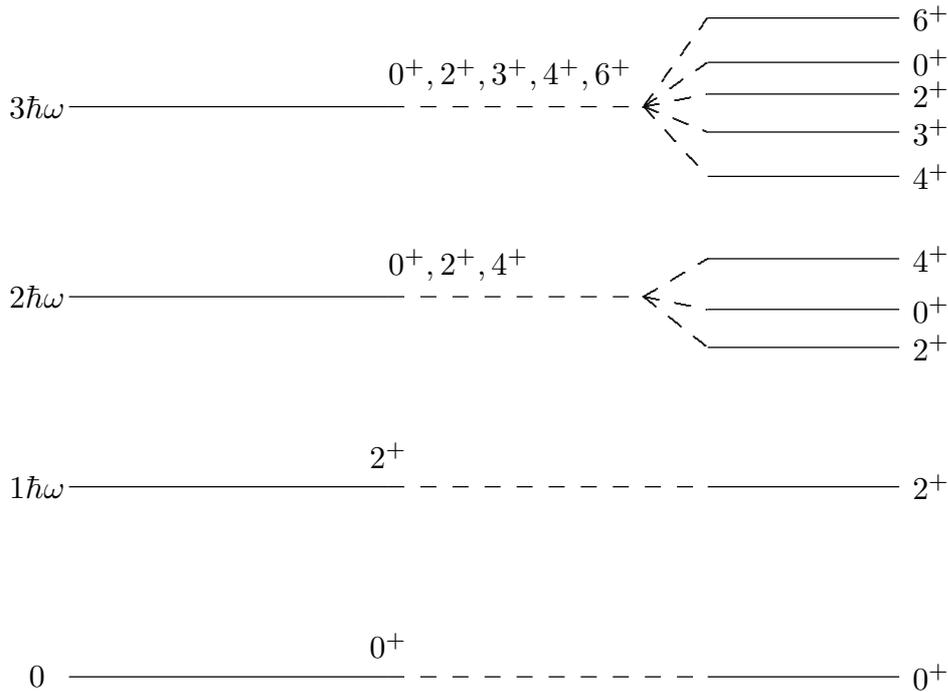


Fig. 4.14 - Estados vibracionais induzidos por até 3 fônons quadrupolares.

cuja frequência ω é dada por $\sqrt{k/m}$. Assim, as vibrações que estamos considerando podem ser entendidas como uma soma de osciladores harmônicos de frequência

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} \quad (4.94)$$

e o nosso esquema quantizado de energias é composto de níveis construídos a partir desses osciladores. Quando o núcleo passa de um nível a outro mais elevado ou mais baixo diz-se que ele absorveu ou emitiu um *fônon* de vibração. Assim, fônons de vibração quadrupolar, octupolar, etc., contribuem para construir o espectro de vibração dos núcleos a partir do estado fundamental, espectro esse denominado de *banda vibracional*.

Pode-se mostrar que um fônon caracterizado por $\lambda\mu$ tem a ele associado um momento angular de módulo $\sqrt{\lambda(\lambda+1)}$, com componente- z igual a μ e paridade $(-1)^\lambda$. A banda vibracional associada a um dado λ existente em um núcleo par-par deve se constituir, pois, de uma série de níveis de energia equidistantes, podendo a cada um deles estar associado mais de um estado. Essa situação é ilustrada no diagrama da figura 4.14. À esquerda do diagrama é mostrada a situação idealizada da excitação por 1, 2 ou 3 fônons quadrupolares. À direita, a situação em um núcleo real, onde a degenerescência é removida por interações residuais. Note que os “spins” de cada nível, resultantes do acoplamento dos momentos angulares dos fônons daquele nível, não contém todos os valores inteiros de zero ao valor máximo possível.

$\mu_{1,2}$	Configurações Possíveis															
+2	xx	x	x	x	x											
+1		x				xx	x	x	x							
0			x				x			xx	x	x				
-1				x				x			x		xx	x		
-2					x				x			x		x	xx	
μ	+4	+3	+2	+1	0	+2	+1	0	-1	0	-1	-2	-2	-3	-4	

Fig. 4.15 - As várias configurações possíveis para os estados de 2 fônons, com $\lambda = 2$.

Existe um modo prático de se estabelecer que spins resultam do acoplamento de um certo número de fônons. Para se ver, por exemplo, por que no acoplamento de 2 fônons (com $\lambda = 2$) estão ausentes os spins 1 e 3, considere o esquema da figura 4.15. Em princípio, os spins totais poderiam ser $I = 0, 1, 2, 3$ e 4. Mas, nesse esquema são mostradas todas as combinações possíveis dos números quânticos μ_1 e μ_2 dos dois fônons, cuja soma é μ . Seja o spin $I = \lambda = 4$; suas projeções possíveis são $\mu = +4, +3, \dots -4$. Para o spin $I = 3$, a projeção máxima seria $+3$. Mas não há outro valor $\mu = 3$ além do atribuído ao spin 4; sendo assim não é possível a existência do spin 3. Ou seja, só obtemos 3 conjuntos de valores de μ , que correspondem aos spins 0, 2 e 4. Da mesma forma $I = 1$ é proibido. Um esquema semelhante pode ser utilizado na combinação de 3 fônons para justificar a ausência de $I = 1$ e $I = 5$. Deve-se ter em mente em todo esse quadro que os fônons, tendo spins inteiros, não obedecem ao Princípio de Pauli e, assim, não há restrição a dois fônons terem os mesmos números quânticos.

Uma justificativa mais formal para os resultados do parágrafo anterior pode ser obtida diretamente da função de onda resultante do acoplamento dos estados que descrevem os dois fônons. Se utilizarmos os coeficientes de Clebsch-Gordan apropriados veremos, por exemplo, que do acoplamento de dois fônons de $\lambda = 2$ resultam funções simétricas para os spins 0, 2 e 4 e antissimétricas para os spins 1 e 3. Essas últimas são inadmissíveis para a descrição de um sistema composto unicamente de bósons.

O modelo vibracional prevê, no caso ideal, uma razão igual a 2 entre as energias do segundo e primeiro estados excitados. A figura 4.16 mostra valores experimentais dessa razão para núcleos par-par em função do número de nêutrons N . Há uma oscilação em torno do valor 2 para $40 < N < 80$, mas outras regiões, em torno de 100 e 140, mostram uma razão próxima a 3,3. Essas últimas regiões são características de grandes deformações do núcleo e os níveis de baixa energia são estados de rotação, que estudaremos na próxima seção.

Cabe mencionar, para finalizar, que núcleos ímpares também admitem bandas vibracionais. Se o núcleo é composto de um caroço esférico mais um núcleon extra, estados podem ser formados pelo acoplamento da órbita individual j com os estados vibracionais do caroço. Assim, por exemplo, pode-se criar no ^{63}Cu , cujo estado fundamental é $3/2^-$, um quadrupletto de estados $\frac{1}{2}^-$, $\frac{3}{2}^-$, $\frac{5}{2}^-$ e $\frac{7}{2}^-$, resultantes do acoplamento de $j = \frac{3}{2}^-$ com $\lambda = 2$.

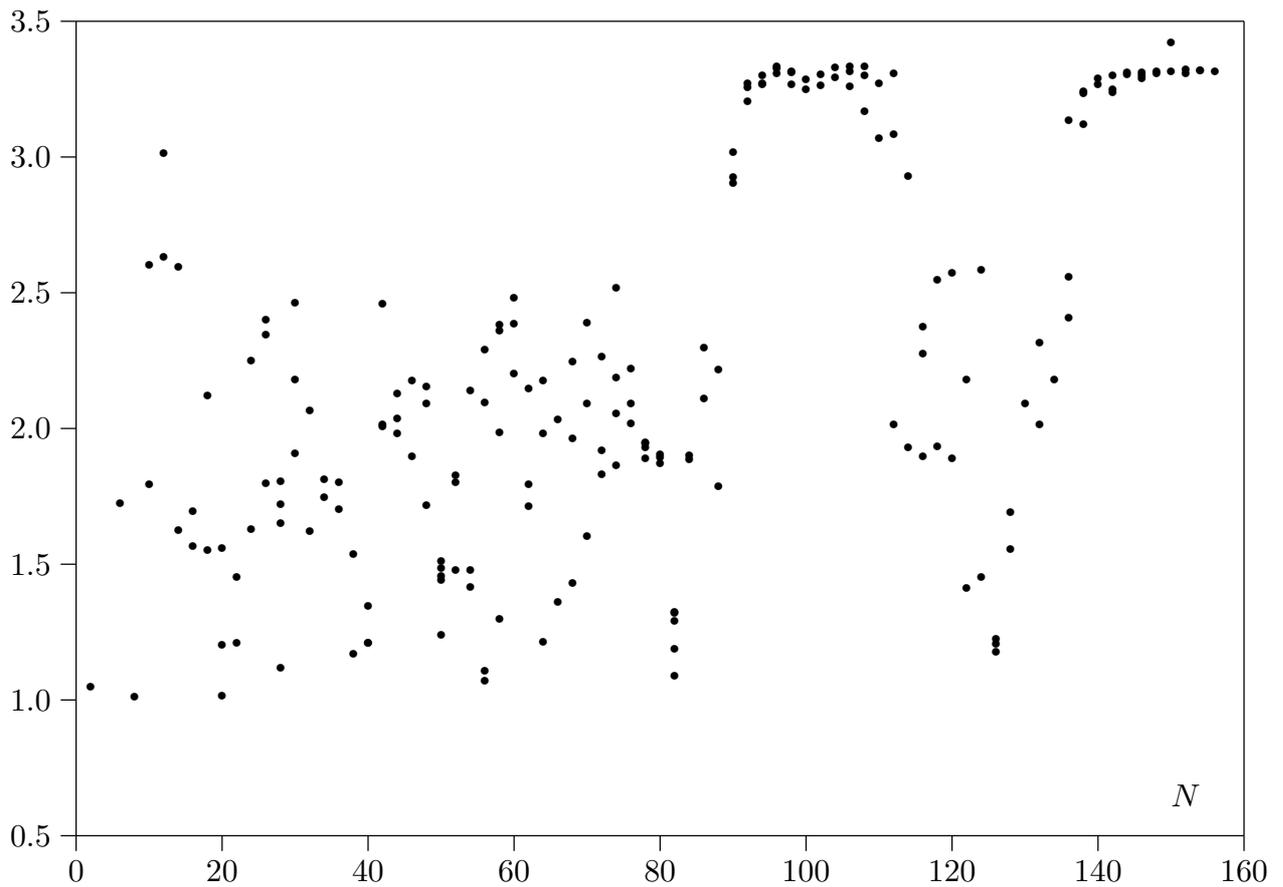


Fig. 4.16 - Razão entre as energias do segundo e primeiro estados excitados para núcleos par-par em função do número de nêutrons N . A amostragem é composta de todos os núcleos par-par estáveis mais os de meia-vida mais longa entre os isótopos de $Z > 82$.

4.9 - Deformação Nuclear

Em determinadas regiões da tabela periódica os núcleos em seu estado fundamental são deformados (figura 4.17). Uma evidência experimental desse fato são os altos valores de momento de quadrupolo nas regiões de $150 \lesssim A \lesssim 180$ e $A \gtrsim 240$ (figura 3.5).

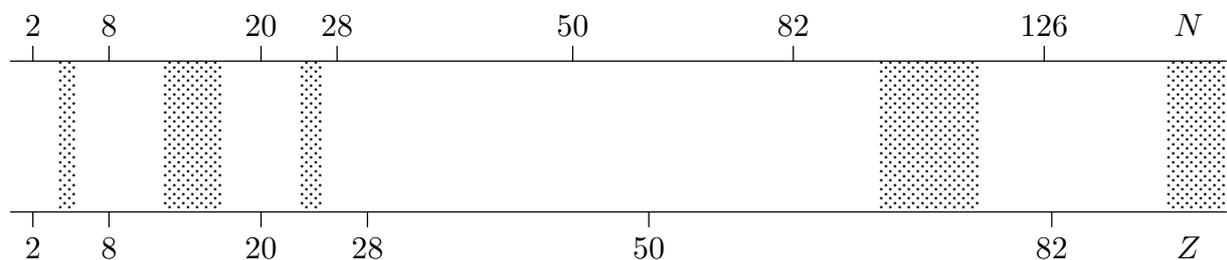


Fig. 4.17 - Forma do núcleo no estado fundamental. As regiões em branco correspondem a núcleos esféricos e as regiões pontilhadas a núcleos deformados.

A razão de certos núcleos apresentarem deformações permanentes se deve à forma de preenchimento de suas órbitas a partir de camadas fechadas. Imaginemos, por exemplo, que o primeiro estado disponível acima de uma camada fechada seja um estado de $l = 2$. A parte angular da função de onda para as três situações possíveis é mostrada na figura 4.18.

O primeiro par de núcleons dará preferência a $m_l = +2$ e $m_l = -2$, pois nesse caso é maior a interceptação de suas funções de onda e isso conduz a uma maior energia de ligação, já que a força entre eles é atrativa (força de emparelhamento). Suponhamos agora que temos um nível g ($l = 4$) logo acima do nível d. Sendo a figura para Y_4^4 semelhante espacialmente à Y_2^2 , o núcleon seguinte dará preferência a se instalar em g com $m = |4|$ (pois a interceptação de sua função de onda com a dos dois núcleos anteriores é maior) do que em d com $m = \pm 1$ ou $m = 0$. O conjunto desses núcleons criará uma assimetria espacial na função de onda do núcleo, e isso caracteriza uma deformação.

Embora um entendimento mais completo desse fenômeno requeira modelos e cálculos sofisticados, o argumento qualitativo acima mostra de maneira simples que a deformação está ligada à preferência por uma forma que torne maior a energia de ligação do núcleo.

4.10 - O Modelo de Nilsson

O fato de certos núcleos serem deformados no estado fundamental sugere a utilização de um modelo de camadas onde o potencial central não seja mais esfericamente simétrico. Tal potencial foi desenvolvido por S. G. Nilsson em 1955 [Ni55], que propôs o emprego da seguinte Hamiltoniana de partícula única

$$H = H_0 + C\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + Dl^2, \quad (4.95)$$

onde H_0 é um potencial de oscilador harmônico anisotrópico:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (4.96)$$

$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ é o termo usual de acoplamento spin-órbita do modelo de camadas esférico e l^2 um termo destinado a simular um achatamento do potencial do oscilador e torná-lo mais próximo de um potencial real. C e D são constantes a serem determinadas pelo ajuste a resultados experimentais.

Se estamos interessados apenas pelo caso particular de simetria axial podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_x^2 = \omega_y^2 &= \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) \\ \omega_z^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

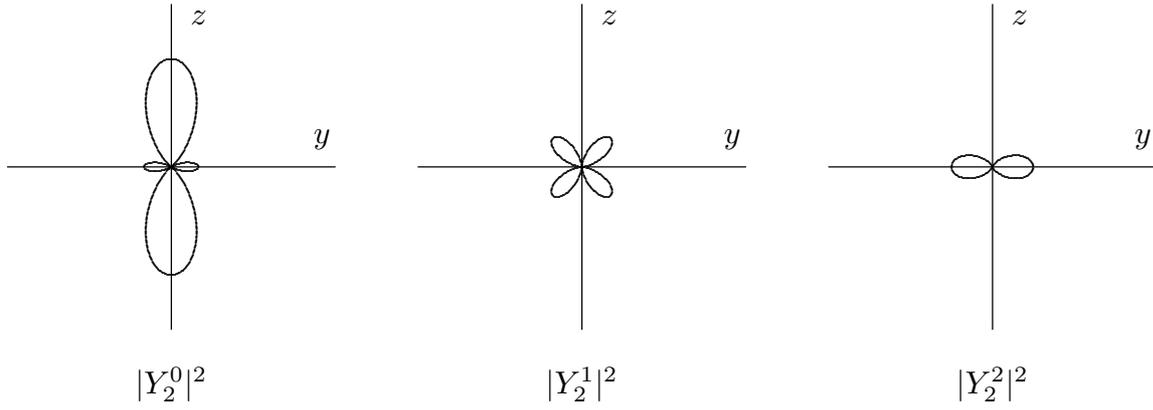


Fig. 4.18 - Visualização no plano y - z da distribuição espacial das funções $|Y_2^m|^2$.

onde as frequências foram colocadas como função de dois novos parâmetros ω_0 e δ ; estes podem ser relacionados através da imposição da conservação do volume nuclear (supondo ser ele determinado por uma superfície equipotencial). O resultado desta imposição leva à relação $\omega_x \omega_y \omega_z = \text{cte} = \hat{\omega}_0^3$, sendo $\hat{\omega}_0$, dessa forma, a frequência para uma deformação nula. Desse modo,

$$\omega_0(\delta) = \hat{\omega}_0 \left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3 \right)^{-1/6}, \quad (4.98)$$

é uma relação que nos deixa com um único parâmetro, o chamado *parâmetro de deformação* δ . Assim, as energias resultantes da diagonalização da hamiltoniana são funções de δ . O procedimento empregado para o cálculo das energias não será apresentado aqui. O resultado é mostrado na figura 4.19, onde são plotados os níveis de energia em função da deformação δ . Uma reta vertical traçada nesse gráfico indica os níveis de energia permitidos para um dado valor do parâmetro δ . Valores positivos de δ correspondem a um núcleo prolato (oval) e valores negativos a um núcleo oblato (em forma de disco). Também é importante mencionar que para um potencial deformado, j e l não são mais bons números quânticos, o que corresponde classicamente ao fato de o momento angular não ser mais uma constante de movimento em um potencial não esfericamente simétrico.

O modelo de Nilsson produz melhoras significativas nas regiões de núcleos deformados, onde o modelo de camadas esférico fracassa. Relacionamos a seguir alguns de seus resultados:

a) O modelo determina corretamente o spin de todos os núcleos leves e de quase todos os pesados.

b) A determinação de momentos magnéticos de muitos núclídeos é agora bem mais acurada. A tabela 4.6 lista os valores experimental e teórico para três núcleos, juntamente com os valores dados pelas linhas de Schmidt correspondentes [veja seção 3.6].

c) Momentos de quadrupolo elétrico para a região $150 < A < 180$ são agora calculados de forma correta. A figura 4.20 mostra valores da deformação δ obtidos a partir dos momentos de quadrupolo para núcleos dessa região.

Fig. 4.19 - Diagrama de Nilsson, mostrando os níveis de energia em função da deformação.

Núcleo	δ	μ_{teo}	μ_{exp}	Linhas de Schmidt	
^{23}Na	0,5	2,4	2,22	-0,4	3,8
^{173}Yb	0,28	-0,8	-0,65	-1,9	1,2
^{187}Re	0,19	3,7	3,2	0,8	4,8

Tab. 4.6 - Momentos magnéticos determinados pelo modelo de Nilsson.

Fig. 4.20 - Valores da deformação nuclear calculados (linha cheia) e medidos, na região dos actínídeos [MN55].

4.11 - O Modelo Rotacional

A existência da deformação nuclear dá ensejo ao aparecimento de rotações como uma forma alternativa de o núcleo absorver energia, já que não faz sentido pensar em rotação de um sistema quântico esfericamente simétrico. De fato, tem-se observado bandas de energia em núcleos deformados com espaçamento entre os níveis que caracteriza inequivocamente uma rotação nuclear coletiva.

Para se estudar essas bandas de rotação, observemos a figura 4.21. O vetor \mathbf{R} representa o momento angular de rotação que, devido à simetria axial, é perpendicular ao eixo de simetria 3 (designando por 1, 2 e 3 o sistema de eixos preso ao núcleo). O vetor \mathbf{j} representa o momento angular intrínseco, e sua projeção Ω sobre 3 coincide com a projeção K do momento angular total $\mathbf{I} = \mathbf{R} + \mathbf{j}$.

Classicamente, a energia cinética de rotação é dada por

$$T_{\text{rot}} = \frac{R^2}{2\tau} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{j})^2}{2\tau}, \quad (4.99)$$

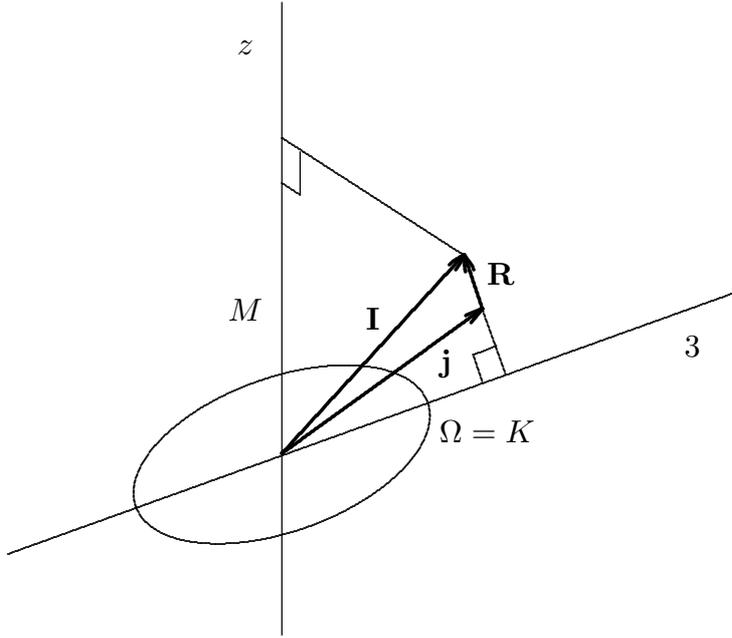


Fig. 4.21 - Acoplamento de momentos angulares em um núcleo deformado com eixo de simetria na direção 3.

sendo τ o momento de inércia para uma rotação em torno de um eixo perpendicular a 3. Escrevendo (4.99) em termos de operadores angulares,

$$T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\tau}(I^2 + j^2 - 2I_3j_3) + T_{\text{acopl}}, \quad (4.100)$$

onde T_{acopl} engloba termos pequenos ligados ao acoplamento das partes intrínseca e rotacional pela força de Coriolis, e que geralmente são desprezíveis em baixas rotações.

As auto-funções de rotação são designadas por $|IMK\rangle$, obedecendo às equações de auto-valores

$$I^2 |IMK\rangle = I(I+1) |IMK\rangle \quad (4.101a)$$

$$I_z |IMK\rangle = M |IMK\rangle \quad (4.101b)$$

$$I_3 |IMK\rangle = K |IMK\rangle. \quad (4.101c)$$

A partir das relações (4.100) e (4.101) podemos verificar que as energias de uma banda rotacional, isto é, os valores esperados do operador T_{rot} , tem a forma

$$E(I) = AI(I+1) + B, \quad (4.102)$$

onde $A = \hbar^2/2\tau$, e B é uma constante que envolve a projeção K e quantidades ligadas à parte intrínseca do sistema. As energias da banda são obtidas pelos valores de $E(I)$ correspondentes aos números inteiros $I \geq K$.

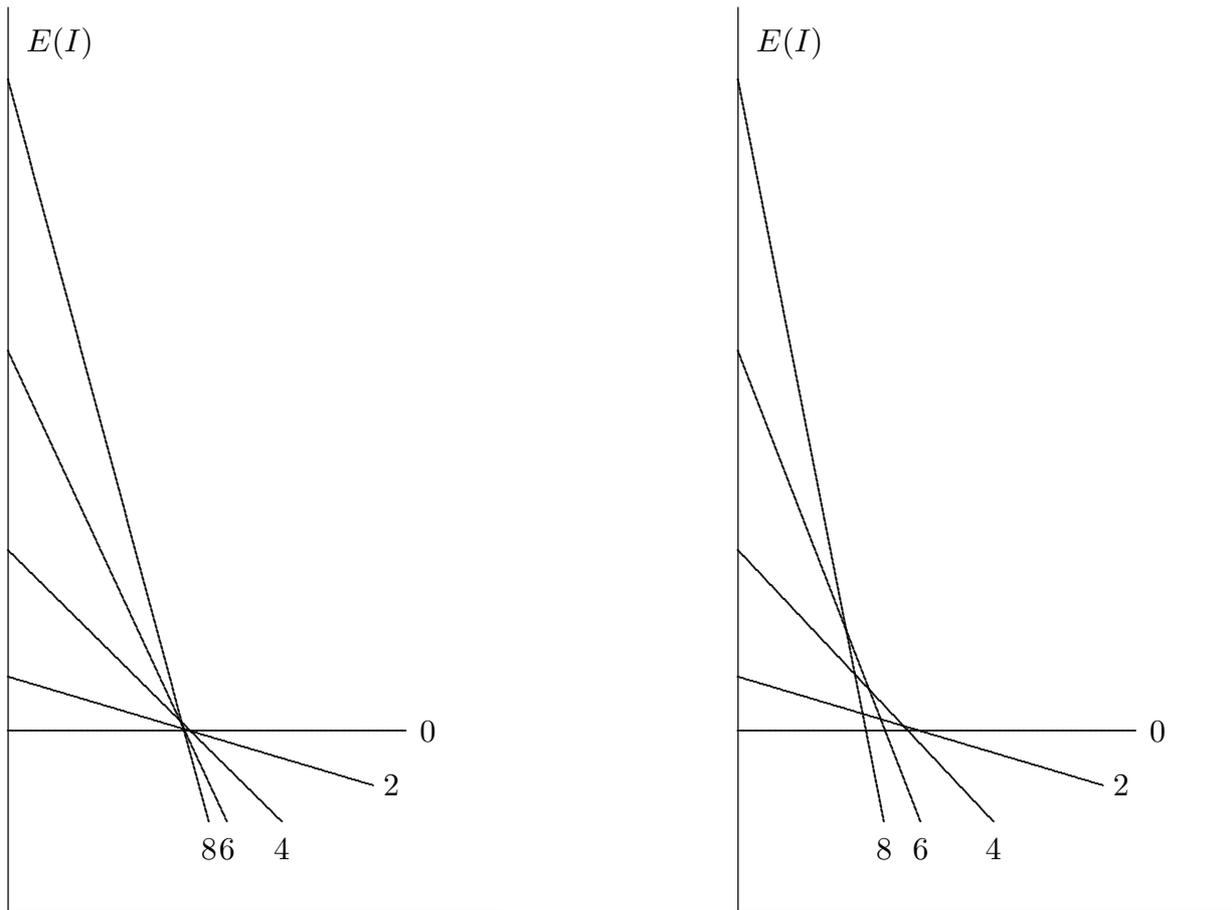


Fig. 4.22 - Diagramas focais de Lipkin. A banda que corresponde ao diagrama à esquerda tem obediência estrita à equação (4.102). No diagrama da direita a obediência é apenas aproximada.

É possível ver se uma seqüência de níveis obedece a (4.102) usando os *diagramas focais de Lipkin* (figura 4.22): em um eixo vertical são colocados os valores de $E(I)$ e retas de inclinação $I(I+1)$ em relação ao eixo horizontal são traçadas a partir desses pontos. Se (4.102) é obedecida as retas se cruzam em um único ponto focal (figura à esquerda); se a obediência é apenas aproximada há a formação de uma cáustica.

Examinemos agora algumas bandas de rotação conhecidas. Vamos tratar de três casos separadamente, já que a formação dos níveis é bem diferente para cada um deles.

a) Núcleos par-par: a parte intrínseca não contribui para o momento angular e $K = 0$. Temos uma banda iniciando em $I = 0+$ e com estados excitados em $I = 2+, 4+, 6+, \text{etc.}$ A ausência dos termos ímpares se deve à forma da função de onda, que deve incorporar a simetria em relação ao plano x-y. Se quisermos que o nível zero de energia corresponda ao estado $0+$, a banda terá a forma bem simples

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} I(I+1) \quad I = 0+, 2+, 4+ \dots \quad (4.103)$$

A figura 4.23 mostra dois exemplos, um nas Terras-Raras e o outros nos Actinídeos.

As bandas de rotação são de fácil identificação experimental. Se, por exemplo, o nível $8+$ de uma das bandas da figura 4.23 for excitado, ele decairá para o nível $6+$ e assim sucessivamente, formando a *cascata* $8+ \rightarrow 6+ \rightarrow 4+ \rightarrow 2+ \rightarrow 0+$. Se a intensidade for suficiente a banda rotacional é facilmente montada a partir do espectro de raios gama.

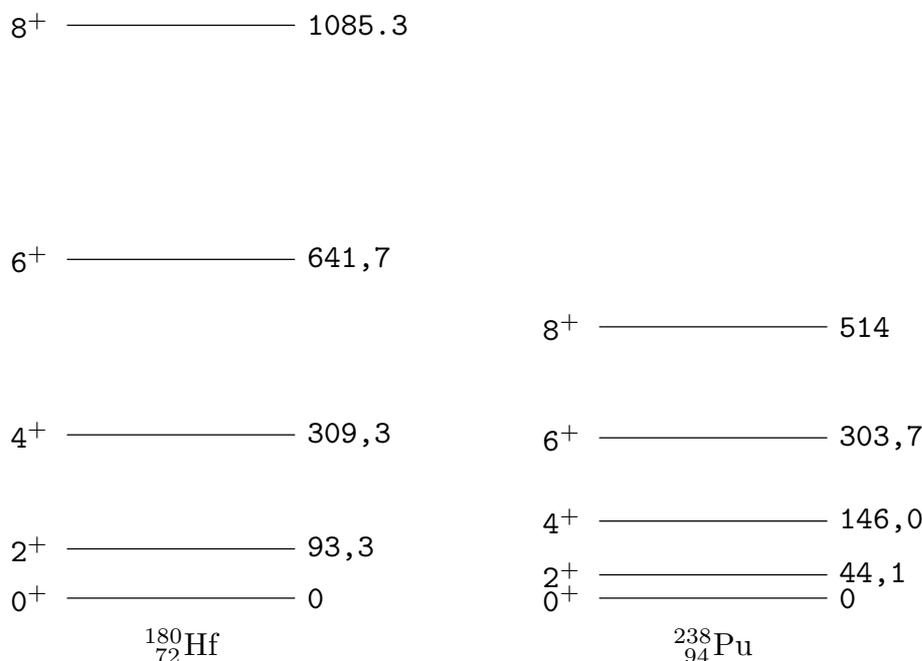


Fig. 4.23 - Bandas rotacionais de núcleos par-par. Os números à direita dos níveis são os valores das energias em keV.

b) Núcleos ímpares com $K \neq \frac{1}{2}$: nesse caso a banda é montada sobre o estado fundamental $I = K$, com estados excitados de $I = K + 1, K + 2, K + 3$, etc., com a energia dos níveis sendo dadas por

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} [I(I + 1) - K(K + 1)] \quad I = K, K + 1, K + 2, \dots \quad (4.104)$$

Um exemplo é visto na figura 4.24.

Um determinado núcleo pode admitir outras bandas de rotação além da associada ao estado fundamental. Em um núcleo ímpar, por exemplo, uma excitação da parte intrínseca cria um novo estado (geralmente com novo valor de K) a partir do qual uma nova banda de rotação pode se estabelecer.

c) Núcleos ímpares com $K = \frac{1}{2}$: o termo de acoplamento que foi desprezado em (4.100) tem a propriedade de misturar bandas nas quais os valores de K difiram de 1 unidade. Como K e $-K$ entram simultâneamente na função de onda, a banda de

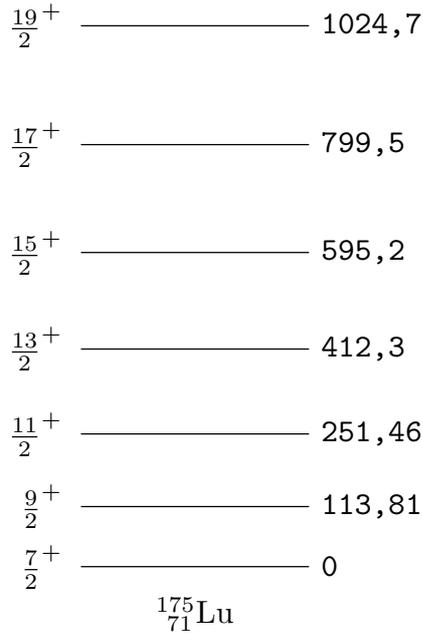


Fig. 4.24 - Banda rotacional de um núcleo ímpar. Os números à direita são os valores das energias em keV.

$K = \frac{1}{2}$ é perturbada em primeira ordem, resultando em uma alteração dos valores das energias, que passam agora a ser calculadas pela expressão

$$E_{K=\frac{1}{2}}(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} [I(I+1) - a(-1)^{I+\frac{1}{2}}(I + \frac{1}{2})] \quad I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (4.105)$$

com a , o *parâmetro de desacoplamento*, dependendo só da parte intrínseca. Ele pode ser determinado, juntamente com τ , conhecendo-se as energias de dois estados excitados. Notemos que para essa banda, $I = K = \frac{1}{2}$ não é necessariamente o nível de energia mais baixa.

As expressões (4.103), (4.104) e (4.105) funcionam corretamente apenas para os primeiros níveis de uma banda. À medida que I cresce os resultados previstos se situam cada vez mais abaixo dos valores experimentais. Uma melhoria pode ser feita se escrevermos a dependência da energia em I como a série

$$E(I) = AI(I+1) + B[I(I+1)]^2 + \dots, \quad (4.106)$$

onde em (4.102) se usou apenas a primeira parcela.

A expressão (4.106) tem sua razão de ser. As equações (4.103), (4.104) e (4.105) foram obtidas a partir da idéia do núcleo como um corpo rígido em rotação tendo, em conseqüência, um momento de inércia constante. A observação dos primeiros níveis

rotacionais do Hf e Pu, na figura 4.23, mostra que essa constância é apenas aproximada. Como resultado da deformação do núcleo com a rotação há um pequeno aumento do momento de inércia quando I cresce, com a conseqüente diminuição da energia $\hbar^2/2\tau$. Usando (4.102) vemos que essa energia cai de 15,55 keV para 15,07 keV quando se vai do nível 2+ para o nível 8+ do Hf e, equivalentemente, de 7,35 keV para 7,14 keV no caso do Pu.

A variação do momento de inércia τ com a rotação pode ser expressa escrevendo a energia de rotação como

$$E = \frac{1}{2}\tau(\omega)\omega^2, \quad (4.107)$$

explicitando a dependência de τ com a frequência angular de rotação ω . O comportamento da função $\tau(\omega)$ foi estudado por S. M. Harris [Ha65], estendendo um modelo criado por D. R. Inglis [In54] para tratar microscopicamente o problema das rotações. Esse modelo tem a mesma concepção do modelo de camadas, onde um núcleon se move no potencial criado pelos demais núcleons. A condição adicional é a de que o potencial deformado gira em torno de um eixo fixo. Harris escolheu a série

$$\tau(\omega) = \tau_0 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \dots \quad (4.108)$$

para descrever a dependência do momento de inércia com a frequência ω . Quando a rotação é entendida como uma perturbação, um cálculo de perturbação de segunda ordem permite determinar τ_0 (rotor rígido) em termos das funções de onda do núcleo não perturbado (sem rotação). A inclusão de termos de quarta ordem permite a determinação de α .

Em termos de aplicação prática, a frequência angular ω deve ser extraída de grandezas experimentais. Partindo da fórmula clássica

$$\omega = \frac{dE}{dI} \quad (4.109)$$

podemos escrever a relação quântica

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar\Delta\sqrt{I(I+1)}}. \quad (4.110)$$

Para a banda de rotação de um núcleo par-par temos

$$\hbar\omega = \frac{E_I - E_{I-2}}{\sqrt{I(I+1)} - \sqrt{(I-1)(I-2)}} \quad (4.111)$$

que, para os níveis mais altos, se reduz com boa aproximação a

$$\hbar\omega = \frac{E_I - E_{I-2}}{2}. \quad (4.112)$$

Para os primeiros níveis de energia, os dois primeiros termos da série (4.108) são suficientes e um gráfico de τ contra ω^2 é uma reta. Para valores crescentes de ω outros termos podem ser importantes e a curva se desviar suavemente para cima. Podemos, no entanto, chegar a um ponto onde a curva assume um comportamento radicalmente diferente. Isso foi pela primeira vez observado por A. Johnson, H. Ryde e S. A. Hjorth [Jo71] quando estudaram a banda rotacional do ^{162}Er , alimentada pela reação $(\alpha,3n)$ no ^{161}Dy . A figura 4.25 mostra o espectro das energias de transição obtido. Os níveis têm um comportamento regular até $I \cong 10$. A partir daí as energias de transição vão diminuindo o crescimento e chegam a diminuir de valor quando I passa de 14 para 16. Em um gráfico de τ contra ω^2 esse efeito se mostra na forma de um retrocesso na curva (*backbending effect*) (figura 4.26).

Fig. 4.25 - Espectro de energia das transições gama do ^{162}Er . Cada pico caracteriza uma transição dentro da banda rotacional. O número do canal no eixo horizontal é proporcional à energia do raio gama emitido [Jo71, reproduzida com a permissão da Elsevier Science].

O modelo de partículas independentes em um potencial girante não pode explicar esse fenômeno, que é ligado à interação residual. A rotação, através da força de Coriolis, compete com a força de emparelhamento e pode chegar a romper o acoplamento de

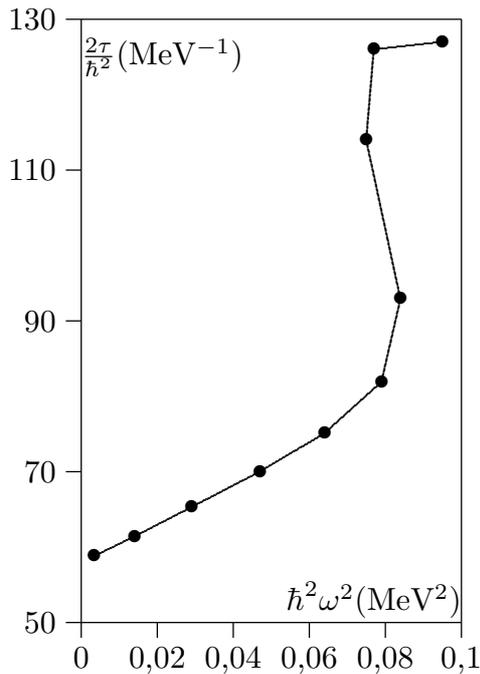


Fig. 4.26 - Momento de inércia τ em função do quadrado da frequência angular ω , calculado a partir da banda rotacional do ^{162}Er .

momento angular zero de um par de núcleons, que passam a alinhar seu momento angular com o do núcleo girante (*alinhamento rotacional*). O resultado é um aumento global nos valores do spin e do momento de inércia do núcleo, este se aproximando do valor do corpo rígido. Esse aumento pode ser substancial na região de terras-raras onde nêutrons de valência se situam na órbita $i_{13/2}$.

A mudança na estrutura interna dá ensejo ao aparecimento de nova banda de rotação associada aos novos parâmetros do núcleo. O processo pode se repetir e o que se observa é um conjunto de bandas, cada uma associada a uma estrutura interna do núcleo. Elas são chamadas de *bandas excitadas* para distingui-las da *banda fundamental*, montada sobre o estado fundamental do núcleo. O estado de mais baixa energia para um dado momento angular é chamado de *estado yrast* (palavra do sueco que significa *o que roda mais*). É um estado de rotação pura, sem excitação intrínseca. Em um gráfico da energia E contra o spin I a seqüência de todos os estados *yrast* é chamada de *linha yrast* (ver figura 4.27). O núcleo girante é geralmente formado por uma reação nuclear em um estado de alta excitação, muito acima da linha *yrast*. Ele decai por emissão de nêutrons e radiação gama até atingir a linha *yrast*. A partir desse ponto decai para o estado fundamental passando por todos os estados da linha.

As regiões de mudanças abruptas na estrutura nuclear são muitas vezes visíveis também em um gráfico de E contra I . A figura 4.27 ilustra o caso do $^{160}_{70}\text{Yb}$. A banda fundamental tem as energias mais baixas até $I = 10$. A partir daí a linha *yrast* segue pela banda excitada que se inicia em 12^+ . Em 30^+ temos um novo retrocesso, com

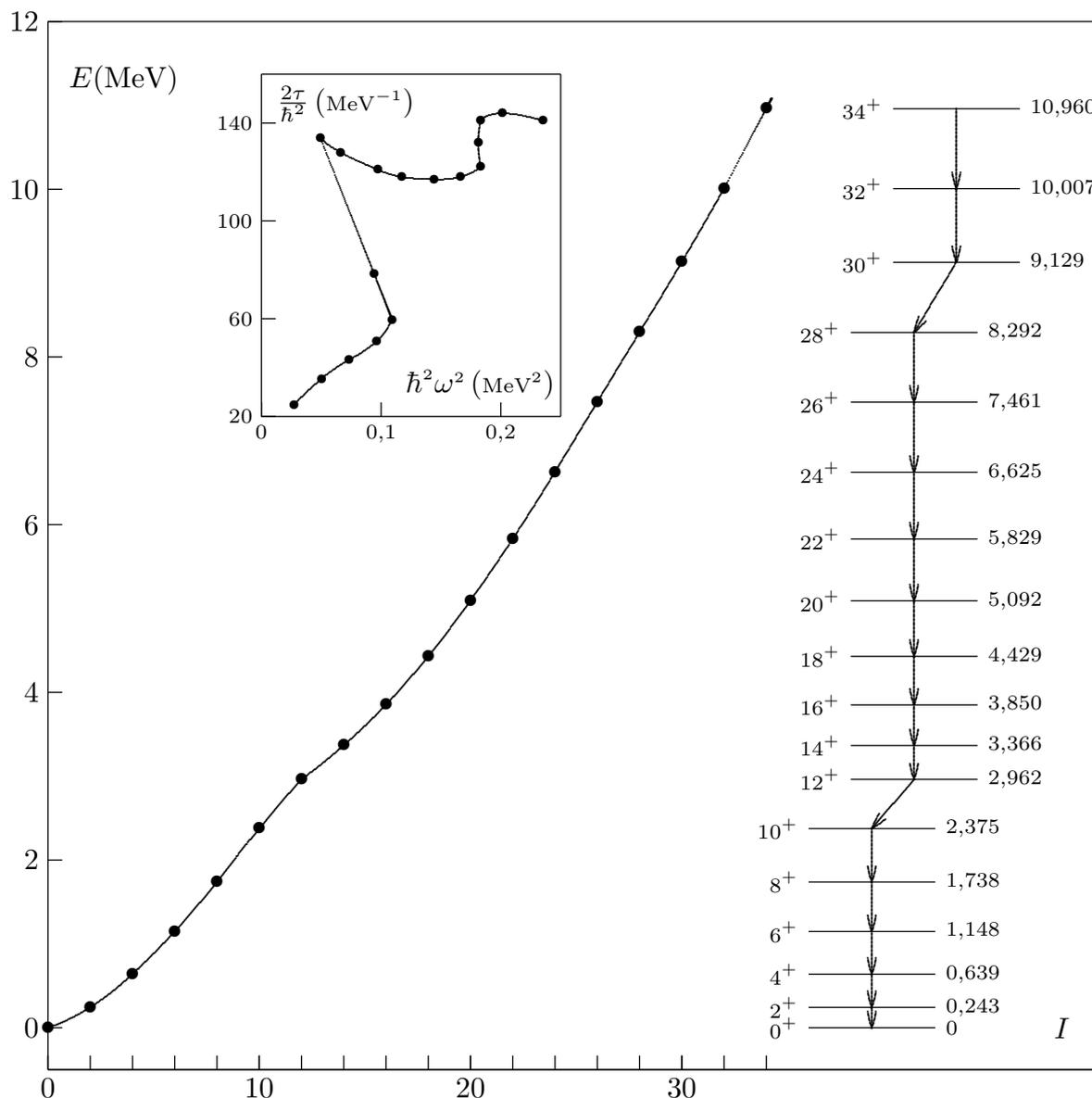


Fig. 4.27 - Linha *yrast* para as bandas de rotação do $^{160}_{70}\text{Yb}$. A primeira banda excitada da linha se inicia em 12^+ (2,962 MeV) e a segunda em 30^+ (9,129 MeV). Diversas bandas de paridade negativa, não mostradas na figura, se iniciam entre 1,5 e 2,8 MeV.

o início de uma nova banda. O primeiro retrocesso é visível como uma mudança na inclinação da linha *yrast*, mas ele aparece de forma muito mais clara no gráfico de τ conta ω^2 inserido na figura. O segundo retrocesso só é visível neste último gráfico.

Um núcleo par-par no estado fundamental tem todos os pares de núcleons acoplados com momento angular zero e, nessa situação, ele é equivalente a um *superfluido*. A quebra de emparelhamentos pela força centrífuga corresponde a uma transição da fase de superfluido para um fluido normal. Nesse aspecto há uma analogia com um supercondutor, onde um campo magnético provoca a mudança para a fase de condutor

normal (efeito Meissner).

Para velocidades de rotação muito elevadas as novas forças que regem o equilíbrio nuclear podem fazer a superfície do núcleo assumir formas muito diferentes da forma do estado fundamental. Em particular, bandas rotacionais onde o núcleo tem uma deformação muito alta têm sido descobertas desde 1985. São conhecidas hoje mais de 160 *bandas superdeformadas* distribuídas em quatro regiões, de $A = 80, 130, 150$ e 190 . Nessas bandas o núcleo tem uma forma elipsoidal muito alongada, com uma razão entre os eixos de 2:1, 1,5:1, 2:1 e 1,7:1, respectivamente. Somente algumas poucas bandas superdeformadas puderam ter sua conexão com a linha *yrast* estabelecida, e de uma maneira ainda precária. Isso faz com que os spins e energias dos níveis sejam determinados relativamente ao primeiro nível da banda e não sejam conhecidos de forma absoluta. Esses valores encontram-se, no entanto, em vias de serem determinados: uma nova geração de detectores de raios gama têm impulsionado o conhecimento nesse campo, que vem atraindo a atenção de diversos laboratórios.

Sugestões para Leitura

- Fay Ajzenberg-Selove e Ernest K. Warburton, “Nuclear Spectroscopy”, *Physics Today*, novembro de 1983, pag. 26.
- M. G. Mayer e J. H. D. Jensen, “Elementary Theory of Nuclear Shell Structure”, Wiley, New York, 1995.
- A Bohr, “Rotational Motion in Nuclei”, *Rev Mod. Phys* **48** (1976) 365.
- M. J. A. de Voigt, J. Dudek e Z. Szymanski, “High-spin Phenomena in Atomic Nuclei”, *Rev. Mod. Phys* **55** (1983) 949.
- George F. Bertsch, “Vibrations of the Atomic Nuclei”, *Scientific American*, julho de 1983, pag. 40.
- John Negele, “Nuclear Mean Field Theory”, *Physics Today*, abril de 1985, pag. 24.

Exercícios

1 - Usando uma tabela de massas, determine os erros percentuais no cálculo das massas do ${}^4\text{He}$, ${}^{120}\text{Sn}$ e ${}^{208}\text{Pb}$ pela equação (4.3).

2 - O núcleo ${}^{132}_{50}\text{Sn}$ não é estável, apesar de possuir números mágicos de prótons e de nêutrons. Verifique se a equação (4.6) pode dar uma explicação para esse fato.

3 - Mostre que a energia cinética média dos núcleons no interior do núcleo dada pelo modelo do gás de Fermi é cerca de 23 MeV.

4 - Mostre que a energia cinética total de um núcleo com $N = Z$ no modelo do gás de Fermi é dada por

$$E_T = 2C_3 A^{-2/3} \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3}$$

e ache o valor de C_3 . Repita o cálculo para $N \neq Z$ e mostre que, nesse caso,

$$E'_T = C_3 A^{-2/3} (N^{5/3} + Z^{5/3}).$$

5 - A tabela abaixo mostra núcleos com seus respectivos valores experimentais de spin e paridade do estado fundamental. Compare com as previsões do Modelo de Camadas extremo para esses núcleos e tente justificar as discrepâncias.

${}^7\text{Be}$	${}^{17}\text{F}$	${}^{61}\text{Cu}$	${}^{91}\text{Zr}$	${}^{93}\text{Ni}$	${}^{123}\text{Sb}$	${}^{159}\text{Tb}$	${}^{183}\text{Ta}$	${}^{199}\text{Tl}$	${}^{209}\text{Pb}$
$\frac{3}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$

6 - A tabela abaixo mostra as órbitas atribuídas ao próton e nêutron extras para uma série de núcleos ímpar-ímpar. a) Tente justificar essa atribuição usando a figura 4.9. b) Determine os spins e paridades desses núcleos pela Regra de Nordheim e compare com os valores experimentais, também mostrados na tabela.

Núcleo	p	n	Spin ^P	Núcleo	p	n	Spin ^P
${}^{16}\text{N}$	$p_{1/2}$	$d_{5/2}$	2^-	${}^{70}\text{Ga}$	$p_{3/2}$	$p_{1/2}$	1^+
${}^{34}\text{Cl}$	$d_{3/2}$	$d_{3/2}$	0^+	${}^{90}\text{Y}$	$p_{1/2}$	$d_{5/2}$	2^-
${}^{38}\text{Cl}$	$d_{3/2}$	$f_{7/2}$	2^-	${}^{92}\text{Nb}$	$g_{9/2}$	$d_{5/2}$	7^+
${}^{41}\text{Sc}$	$f_{7/2}$	$f_{7/2}$	0^+	${}^{206}\text{Tl}$	$s_{1/2}$	$p_{1/2}$	0^-
${}^{62}\text{Cu}$	$p_{3/2}$	$f_{5/2}$	1^+	${}^{202}\text{Bi}$	$h_{9/2}$	$f_{5/2}$	5^+

7 - O spin e paridade do ${}^9\text{Be}$ e ${}^9\text{B}$ é $\frac{3}{2}^-$ para ambos os núcleos. Admitindo que esses valores são dados pelo último núcleon, justifique o valor observado, 3^+ , do ${}^{10}\text{B}$. Que outras combinações spin-paridade podem aparecer? Verifique em uma carta de núclídeos a presença de estados excitados do ${}^{10}\text{B}$ que poderiam corresponder a essas combinações.

8 - O ${}^{13}\text{C}$ e o ${}^{13}\text{N}$ têm, ambos, um estado fundamental $\frac{1}{2}^-$ e três estados excitados abaixo de 4 MeV, de spin-paridade $\frac{1}{2}^+$, $\frac{3}{2}^-$ e $\frac{5}{2}^+$. Os demais estados se situam acima de 6 MeV. Interprete esses quatro estados de acordo com o modelo de camadas.

9 - Os números 28 e 40 são, por vezes, tratados como *semi-mágicos*. Seria possível, examinando a figura 4.9, encontrar uma justificativa para essa atribuição?

10 - O estado fundamental do ${}^{137}\text{Ba}$ possui spin-paridade $\frac{3}{2}^+$. Os primeiros dois estados excitados possuem spin-paridade $\frac{1}{2}^+$ e $\frac{11}{2}^-$. De acordo com o Modelo de Camadas, que níveis seriam esperados para esses estados excitados?

11 - Supondo que o próton extra se move na superfície de um caroço esférico, calcule os momentos de quadrupolo elétrico do ${}^{17}\text{O}$, ${}^{175}\text{Lu}$ e ${}^{209}\text{Bi}$. Compare com os valores experimentais respectivos, dados em barns: $-0,026$, $+7,0$ e $-0,37$. Tente justificar alguma eventual discrepância.

12 - O estado fundamental do ${}^{123}_{51}\text{Sb}$ é um estado de spin-paridade $\frac{7}{2}^+$ e o valor de seu momento magnético $2,547 \mu_N$. a) Determine o valor mais provável do momento orbital

l do último núcleon. b) Confira o valor encontrado com o indicado pelo diagrama 4.9. Há alguma razão especial para se esperar uma boa previsão para esse núcleo?

13 - Utilizando uma construção idêntica à da tabela 4.4, mostre que os valores possíveis de j resultantes de um acoplamento de 3 núcleons em um nível de $j = \frac{5}{2}$ são $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{9}{2}$.

14 - Ache o volume do núcleo cuja superfície é descrita por (4.79), com $\lambda = 2$ e $\mu = 0$.

15 - Construindo uma tabela semelhante à da figura 4.15, mostre que os estados finais permitidos, resultantes do acoplamento de três fônons de quadrupolo, são 0^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ , e 6^+ .

16 - Diga quais os possíveis estados (spin e paridade) resultantes do acoplamento de um fônon quadrupolar ($\lambda = 2$) com um fônon octupolar ($\lambda = 3$). Justifique.

17 - O segundo estado 2^+ de uma banda vibracional tem energia de 3,92 keV e o primeiro estado 4^+ tem energia 3,55 keV. Estime a energia do primeiro estado 2^+ e do primeiro 6^+ .

18 - Dadas as energias (em keV) do estado fundamental 0^+ e dos primeiros estados excitados 2^+ e 4^+ dos núcleos par-par abaixo, determine o provável valor da energia do primeiro estado 6^+ em cada um dos casos. É o núcleo X esférico ou deformado? E o núcleo Y?

4^+ _____ 390 2^+ _____ 120 0^+ _____ 0	4^+ _____ 122 2^+ _____ 60 0^+ _____ 0
---	--

19 - O primeiro estado excitado da maioria dos núcleos mágicos tem spin-paridade 3^- e é interpretado como um estado de vibração de 1 fônon. a) A que ordem multipolar corresponde tal tipo de vibração? b) Que spins e paridades se espera para os estados resultantes do acoplamento de dois desses fônons? c) Um desses núcleos é o $^{208}_{82}\text{Pb}$. Seu primeiro estado excitado se encontra em 2615 keV. Em torno de que energia devemos procurar os estados do item (b)?

20 - Examinando a posição dos nuclídeos $^{122}_{52}\text{Te}$ e $^{160}_{66}\text{Dy}$ na figura 4.17, faça uma estimativa da energia dos estados 4^+ e 6^+ de cada nuclídeo, sabendo que as energias do estado 2^+ são 563,6 keV para o primeiro e 86,8 keV para o último.

21 - O núcleo deformado $^{164}_{68}\text{Er}$ tem seu primeiro estado excitado, 2^+ , em 91,4 KeV. a) Sabendo ser ele o primeiro estado excitado de uma banda de rotação, use (4.103) para determinar seu momento de inércia. b) Diga quais os valores de spin e paridade dos 4 estados seguintes da banda. c) Calcule a energia desses estados e compare com os valores experimentais respectivos (em keV): 208,1; 315,0; 410,2; 493,5. d) Volte a calcular o momento de inércia do núcleo para cada um desses valores experimentais e interprete os resultados.

22 - Em um núcleo ímpar deformado os três primeiros níveis estão a 0, 40 e 96 keV. Supondo que eles formam uma banda de rotação, diga em que energia devemos procurar o nível de spin $\frac{11}{2}$ dessa banda.

23 - O estado fundamental de um núcleo ímpar tem spin $\frac{3}{2}$. Ele, e mais três estados excitados, de 12, 32 e 60 keV fazem parte de uma banda de rotação. a) que parâmetros definem essa banda? b) Quais são os spins e paridades desses níveis?

24 - A linha *grast* do núcleo deformado $^{158}_{68}\text{Er}$ é formada pelos estados listados abaixo:

Spin	Energia (keV)	Spin	Energia (keV)	Spin	Energia (keV)
0^+	0	14^+	3193	28^+	8143
2^+	192	16^+	3666	30^+	9020
4^+	527	18^+	4233	32^+	9927
6^+	970	20^+	4892	34^+	10887
8^+	1494	22^+	5632	36^+	11906
10^+	2074	24^+	6438	38^+	12967
12^+	2683	26^+	7284		

Trace os gráficos correspondentes às figuras 4.26 e 4.27 e tente identificar as bandas de rotação presentes.

5 - RADIOATIVIDADE

5.1 - Introdução

Os isótopos estáveis ocupam uma estreita faixa da carta de núclídeos, chamada de linha de estabilidade- β , ao lado da qual aparecem núclídeos instáveis por emissão β^+ ou β^- . Para $A > 150$ a emissão de uma partícula- α começa a ser energeticamente favorável e nessa região se encontram muitos α -emissores. Núcleos pesados também liberam energia se divididos em duas partes aproximadamente iguais e podem, por isso, fissionar espontaneamente. Uma *substância radioativa*, que contém algum isótopo instável, está em permanente transformação pela atuação de um ou mais desses processos. A física de cada um deles será estudada oportunamente. Neste capítulo vamos nos interessar apenas pelo aspecto estatístico do problema e determinar a evolução no tempo do número de átomos e da atividade de substâncias radioativas de uma forma independente do tipo de processo que está em jogo.

Assim sendo, chamemos de N o número de átomos de um isótopo instável no instante t . Se admitirmos que existe uma probabilidade λ , fixa, de ocorrer um determinado processo em um núcleo na unidade de tempo, a variação dN do número de átomos no intervalo dt pode ser escrita

$$dN(t) = -\lambda N dt. \quad (5.1)$$

λ é chamada de *constante de desintegração* daquele isótopo para o processo em questão. A taxa com que uma amostra de uma substância se desintegra é medida pela *atividade* $A(t)$ dessa amostra. De (5.1) se tira que

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (5.2)$$

O número N de átomos em um instante qualquer t pode ser obtido facilmente pela integração de (5.1):

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (5.3)$$

onde N_0 é o número de átomos no instante zero. Usando (5.3) podemos calcular a *meia-vida* de uma amostra radioativa, definida como o tempo necessário para que metade dos átomos da amostra se desintegrem, isto é, $N(t_{1/2}) = N_0/2$. Obtemos:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (5.4)$$

Vejamos a aplicação de (5.9) ao dois primeiros elementos de uma cadeia. Nesse caso as constantes para o segundo elemento são

$$h_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

o número de átomos das substâncias 1 e 2 será dado por

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ N_2(t) &= N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

e as atividades correspondentes por

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t}, \\ A_2(t) &= \lambda_2 N_2 = A_1(t) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A figura 5.1 mostra, para dois casos extremos, o comportamento das atividades das substâncias 1 e 2 em função da grandeza adimensional $\lambda_1 t$.

Fig. 5.1 - Representação da atividade dada pela equação (5.12) para dois casos extremos: $\lambda_2 \gg \lambda_1$ e $\lambda_2 \ll \lambda_1$.

Se o terceiro elemento da cadeia é estável, seu número de átomos cresce de acordo com a expressão

$$N_3 = N_1(0) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} + 1 \right). \quad (5.13)$$

Se, por exemplo, a primeira substância tem meia-vida de 1 dia, a segunda de 1 semana, (5.11) e (5.13) fornecem, para esse caso, o gráfico da figura 5.2.

Fig. 5.2 - Evolução temporal do número de átomos de 3 substâncias radioativas com decaimentos sucessivos. A primeira tem 1000 átomos no instante inicial e as outras duas, zero.

5.3 - Preparação de uma Substância Radioativa

A preparação de uma amostra contendo uma substância radioativa é geralmente feita pela criação dos átomos da substância a uma taxa constante. Um exemplo é a ativação por um fluxo constante de nêutrons de um reator nuclear, onde os nêutrons são capturados pelos núcleos do alvo, levando à formação de núcleos instáveis. Seja P a taxa com a qual a substância é produzida. O número de átomos $N(t)$ obedece à equação :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N + P, \quad (5.14)$$

cuja solução é

$$N = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad (5.15)$$

com a atividade correspondente

$$A = \lambda N = P (1 - e^{-\lambda t}). \quad (5.16)$$

A figura 5.3 mostra essa atividade em função do tempo, indicando que o processo de produção começa a ficar ineficiente após decorrida uma meia-vida da amostra. Para tempos de várias meias-vidas a continuação do processo é completamente inútil pois a substância decai com a mesma rapidez com que é produzida. A maneira mais eficiente de se produzir a substância radioativa seria a de renovar periodicamente o material a ser irradiado com um período igual a algumas poucas meias-vidas.

Fig. 5.3 - Atividade de uma substância radioativa produzida a uma taxa constante.

5.4 - Equilíbrio Secular

Seja o conjunto de isótopos radioativos que forma a série de decaimentos sucessivos (5.7). Dizemos que esse conjunto está em equilíbrio secular quando o número de átomos de cada espécie é praticamente constante, isto é,

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \dots \cong 0. \quad (5.17)$$

Examinando a equação (5.8), válida para $i > 1$, vemos que essa condição implica em

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots \quad (5.18)$$

A equação do decaimento do isótopo 1, $dN_1/dt = -\lambda_1 N_1$, mostra que (5.17) será aproximadamente satisfeita se λ_1 for muito pequena. Dessa forma, o equilíbrio secular se caracteriza por um isótopo de meia-vida muito longa decaindo sucessivamente em outros de período bem mais curto. Há vários exemplos dessa forma de equilíbrio ocorrendo na natureza, como veremos na seção a seguir.

5.5 - Séries Radioativas Naturais

Se um isótopo radioativo tem uma meia-vida cuja ordem de grandeza é igual ou superior à idade da Terra, amostras contendo esse isótopo em equilíbrio secular com seus sucessores podem ser ainda encontradas. Esse é o caso dos isótopos $^{238}_{92}\text{U}$, $^{235}_{92}\text{U}$ e $^{232}_{90}\text{Th}$, que formam 3 séries radioativas independentes, como pode ser visto nas tabelas 5.1 a, b e c.

Nuclídeo	Modo de Decaimento	Meia-vida	Nuclídeo	Modo de Decaimento	Meia-vida
$^{238}_{92}\text{U}$	α	$4,5 \times 10^9$ a	$^{218}_{85}\text{At}$	α	1,73 s
$^{234}_{90}\text{Th}$	β^-	24,1 d	$^{214}_{83}\text{Bi}$	α, β^-	19,7 min
$^{234}_{91}\text{Pa}$	β^-	1,8 min	$^{214}_{84}\text{Po}$	α	$1,64 \times 10^{-4}$ s
$^{234}_{91}\text{Pa}$	β^-	6,7 h	$^{210}_{81}\text{Tl}$	β^-	1,32 min
$^{234}_{92}\text{U}$	α	$2,5 \times 10^5$ a	$^{210}_{82}\text{Pb}$	β^-	22 a
$^{230}_{90}\text{Th}$	α	$8,0 \times 10^4$ a	$^{210}_{83}\text{Bi}$	β^-	5 d
$^{226}_{88}\text{Ra}$	α	1620 a	$^{210}_{84}\text{Po}$	α	138,3 d
$^{222}_{86}\text{Rn}$	α	3,82 d	$^{206}_{81}\text{Tl}$	β^-	4,2 min
$^{218}_{84}\text{Po}$	α, β^-	3,1 min	$^{206}_{82}\text{Pb}$	estável	
$^{214}_{82}\text{Pb}$	β^-	26,8 min			

Tab. 5.1a - A série natural do ^{238}U .

A independência das séries, isto é, o fato de elas não terem elementos em comum, se deve a que a desintegração α muda o número de massa A de 4 unidades e a desintegração β não muda A . Dessa maneira, sendo n um inteiro, o número de massa de

Nuclídeo	Modo de		Nuclídeo	Modo de	
	Decaimento	Meia-vida		Decaimento	Meia-vida
$^{235}_{92}\text{U}$	α	$7,1 \times 10^8$ a	$^{215}_{84}\text{Po}$	α, β^-	$1,83 \times 10^{-3}$ s
$^{231}_{90}\text{Th}$	β^-	24,6 h	$^{211}_{82}\text{Pb}$	β^-	36,1 min
$^{231}_{91}\text{Pa}$	α	$3,43 \times 10^4$ a	$^{215}_{85}\text{At}$	α	10^{-4} s
$^{227}_{89}\text{Ac}$	α, β^-	22 a	$^{211}_{83}\text{Bi}$	α, β^-	2,16 min
$^{227}_{90}\text{Th}$	α	18,6 d	$^{211}_{84}\text{Po}$	α	0,52 s
$^{223}_{87}\text{Fr}$	β^-	21 min	$^{207}_{81}\text{Tl}$	β^-	4,79 min
$^{223}_{88}\text{Ra}$	α	11,2 d	$^{207}_{82}\text{Pb}$	estável	
$^{219}_{86}\text{Rn}$	α	3,92			

Tab. 5.1b - A série natural do ^{235}U .

Nuclídeo	Modo de		Nuclídeo	Modo de	
	Decaimento	Meia-vida		Decaimento	Meia-vida
$^{232}_{90}\text{Th}$	α	$1,39 \times 10^{10}$ a	$^{212}_{82}\text{Pb}$	β^-	10,6 h
$^{228}_{88}\text{Ra}$	β^-	6,7 a	$^{216}_{85}\text{At}$	α	3×10^{-4} s
$^{228}_{89}\text{Ac}$	β^-	6,13 h	$^{212}_{83}\text{Bi}$	α, β^-	47 min
$^{228}_{90}\text{Th}$	α	1,9 a	$^{212}_{84}\text{Po}$	α	3×10^{-7} s
$^{224}_{88}\text{Ra}$	α	3,64 d	$^{208}_{81}\text{Tl}$	β^-	2,1 min
$^{220}_{86}\text{Rn}$	α	54,5 s	$^{208}_{82}\text{Pb}$	estável	
$^{216}_{84}\text{Po}$	α, β^-	0,16 s			

Tab. 5.1c - A série natural do ^{232}Th .

todos os isótopos da primeira série será da forma $4n + 2$ e diz-se por isso que o ^{238}U e seus descendentes formam a série $4n + 2$. Do mesmo modo, o ^{235}U encabeça a série $4n + 3$ e o ^{232}Th a série $4n$. A série $4n + 1$ não possui qualquer isótopo com meia-vida suficientemente longa para ter sobrevivido desde a formação da Terra e não pode assim ser encontrada na natureza. Mas, um isótopo como o $^{237}_{93}\text{Np}$, de meia-vida $2,14 \times 10^6$ anos, produzido artificialmente, pode dar lugar a essa série.

5.6 - Unidades de Radioatividade

Para se estabelecer um conjunto de unidades para a radioatividade, pode-se pensar na intensidade das fontes emissoras ou nos efeitos por ela produzidos, especialmente no corpo humano. Uma grandeza que leva em conta apenas o primeiro fator é a atividade, definida por (5.2), e que se refere apenas ao número de desintegrações da amostra, não importando a energia ou o tipo de radiação emitida. As unidades empregadas para a atividade são:

- a) O *Curie* (Ci), com $1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10}$ desintegrações/s.
- b) O *Becquerel* (Bq), com $1 \text{ Bq} = 1$ desintegração/s $= 0,27 \times 10^{-10} \text{ Ci}$.
- c) O *Rutherford* (Rd), com $1 \text{ Rd} = 10^6$ desintegrações/s.

Quando se quer também mensurar os efeitos da radioatividade, outras grandezas são necessárias. Um efeito característico das radiações é a ionização, ou seja, o arrancamento de elétrons dos átomos, produzindo elétrons livres e íons positivos. Uma grandeza que expressa a ionização produzida pela radiação gama e X no ar é a *exposição*. Sua unidade no Sistema Internacional (SI) é o Coulomb/Kg de ar, mas uma unidade tradicional ainda em uso é o *Roentgen* (R), definindo-se 1 R como sendo a quantidade de radiação que produz a carga de 1 esu em 1 cm^3 de ar. Nas CNTP ambas se relacionam do modo seguinte:

$$1 \text{ Roentgen} \equiv 1 \text{ R} = 1 \text{ esu}/1 \text{ cm}^3 \text{ de ar} = 2,58 \times 10^{-4} \text{ C/Kg de ar.} \quad (5.19)$$

Pode-se também definir uma grandeza relacionada à quantidade de energia produzida pela passagem da radiação, ou de partículas, em um dado material. Tal grandeza é a *dose absorvida* e sua unidade tradicional é o *rad* (rd), sendo

$$1 \text{ rd} = 10^{-2} \text{ J/Kg} = 100 \text{ ergs/g do material,} \quad (5.20)$$

embora, como nas demais grandezas, haja a recomendação do uso do SI, cuja unidade respectiva é o *Gray* (Gy), com

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg do material} = 100 \text{ rd.} \quad (5.21)$$

Para um dado material a exposição e a dose absorvida se relacionam. Assim, para o tecido mole do corpo, $1 \text{ R} \cong 1 \text{ rd}$; para o ar, $1 \text{ R} \cong 0,9 \text{ rd}$.

Danos biológicos causados pela radiação não dependem somente da energia depositada mas também da natureza da partícula ionizante. Para se ter uma medida desses danos que seja livre dessa dependência criou-se uma grandeza, a *dose equivalente*, que é obtida a partir da dose absorvida multiplicando-se essa por um *fator de peso da radiação*, w_R , que depende da natureza e da energia da partícula ou radiação. As unidades empregadas são o *rem* (*Roentgen Equivalent Man*)

$$1 \text{ rem} = w_R \times (\text{dose em rads}) \quad (5.22)$$

Radiação	w_R
Raios-X e Raios- γ , todas as energias	1
Elétrons e Múons, todas as energias	1
Nêutrons < 10 keV	5
10 keV-100 keV	10
100 keV-2 MeV	20
2 MeV-20 MeV	10
> 20 MeV	5
Prótons > 2 MeV	5
Partículas- α , fragmentos de fissão e núcleos pesados	20

Tab. 5.2 - O fator de peso da radiação, w_R

e, no SI, o *Sievert* (Sv), sendo

$$1 \text{ Sv} = w_R \times (\text{dose em Gy}) = 100 \text{ rem.} \quad (5.23)$$

Para o fator de peso da radiação, w_R , podem ser usados os valores da tabela 5.2.

O limite recomendado para exposição à radiação (dose de corpo inteiro) varia de país a país: no Brasil é de no máximo 1 mSv/ano para o público em geral e 50 mSv/ano para profissionais da área; nos Estados Unidos esses números são de 5 mSv/ano e 50 mSv/ano, respectivamente; no Reino Unido, quem trabalha com radiação não deve receber mais do que 15 mSv/ano. A quantidade de radiação de fundo a que estamos submetidos está normalmente dentro da faixa 0,4-4 mSv/ano, mas pode alcançar 50 mSv/ano em determinadas áreas. Em uma radiografia pulmonar recebe-se uma dose que pode ir de 0,02 mSv a 3 mSv, sendo 0,2 mSv um valor típico. Em uma radiografia dentária uma dose típica fica em torno de 6,5 mSv. Não se pode estabelecer com precisão os efeitos imediatos ou a curto-prazo de grandes doses de radiação mas sabe-se que eles começam a aparecer para doses de cerca de 0,5 Sv. Para 3-4 Sv é provável a morte da metade da população exposta em menos de um mês, enquanto a sobrevivência a uma dose de 6 Sv é muito improvável. Deve-se ter em mente, além do mais, os efeitos a longo-prazo da radiação, que são ainda mais difíceis de avaliar. Para estes, suspeita-se que haja mesmo certos tipos de danos, os genéticos por exemplo, onde não há limiar de dose, ou seja, eles podem ocorrer, ainda que com pouca probabilidade, para doses muito baixas. É recomendável, portanto, limitar a exposição a qualquer forma de radiação ionizante ao estritamente necessário.

5.7 - Datação Nuclear

O fato de conhecermos a lei de variação com o tempo da quantidade de uma ou mais substâncias radioativas em uma amostra, permite que essas substâncias sejam usadas como “relógios” para a marcação de tempos muito longos. Duas propriedades tornam possível essa utilização. A primeira é que a radioatividade, sendo devida ao núcleo atômico, não sofre influências externas do meio ambiente, como variações com a pressão e temperatura. A segunda é que, mesmo sendo o decaimento radioativo um processo estatístico, as flutuações das quantidades esperadas são muito pequenas, em virtude de lidarmos com um número muito grande de átomos. Assim, se partirmos de $N = 10^{20}$ átomos de uma substância radioativa, após uma meia-vida teremos $0,5 \times 10^{20}$ átomos. A flutuação ΔN em torno desse valor é da ordem de \sqrt{N} , ou seja, $\Delta N = 10^{10}$. O erro relativo associado será de $\Delta N/N = 10^{-10}$, muito menor do que a contribuição de outras incertezas presentes.

Para a determinação de idades geológicas são utilizados isótopos radioativos cujas meias-vidas muito altas permitiram que sobrevivessem desde a formação da Terra, e que sejam encontrados presentemente em quantidades suficientes para análise.

Examinemos o problema quantitativamente. Seja P_0 a quantidade de um isótopo radioativo no tempo t_0 . Esse isótopo decai, com uma taxa de desintegração λ , em outro isótopo, cujo número de átomos no tempo t_0 é F_0 . Se admitirmos que não há ganho ou perda de pai e filho em uma amostra, exceto o decaimento do pai no filho, podemos dizer que

$$P + F = P_0 + F_0, \quad (5.24)$$

onde P e F são os números de átomos presentes, no tempo t , de pai e filho respectivamente, e que

$$P = P_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (5.25)$$

De (5.24) e (5.25) podemos obter que

$$e^{-\lambda(t-t_0)} = \frac{P}{P_0} = \frac{1 + F_0/P_0}{1 + F/P} \quad (5.26)$$

A relação (5.26) permite que se conheça o intervalo $\Delta t = t - t_0$ se forem conhecidas as quantidades λ e F/P , que podem ser medidas, e F_0/P_0 . Essa última requer uma hipótese, ou modelo, para a razão dos isótopos no instante inicial. Um procedimento que torna desnecessária essa hipótese pode ser desenvolvido quando a amostra tem um outro isótopo do filho, com número de átomos F' , que é estável (não-radioativo) e não é alimentado por um decaimento de meia-vida longa. Nesse caso, (5.24) pode ser reescrita na forma

$$\frac{P + F}{F'} = \frac{P_0 + F_0}{F'_0} \quad (5.27)$$

já que, com nossas hipóteses, $F' = F'_0$. Isso resulta em

$$\frac{F}{F'} = \frac{P}{F'} \left[e^{\lambda(t-t_0)} - 1 \right] + \frac{F_0}{F'_0}. \quad (5.28)$$

Tomemos uma rocha em que evidências geológicas indicam ter cristalizado em um curto período a partir de uma mistura. Os diferentes minerais presentes na rocha têm diferentes razões F/F' e P/F' mas podemos supor que a razão isotópica F_0/F'_0 é a mesma para todos eles. Se isso é verdade, a relação (5.28) entre F/F' e P/F' é linear, e o coeficiente angular da reta construída a partir dos diferentes minerais da rocha fornece a idade da mesma, $\Delta t = t - t_0$.

Os isótopos a serem escolhidos para a aplicação de (5.28) dependem da presumível idade da rocha a ser analisada e de sua composição. Os isótopos empregados em geocronologia são listados na tabela 5.3.

Núcleo Pai (P)	Núcleo produto (F)	Meia-vida (10^9 anos)	Núcleo estável (F')
^{238}U	^{206}Pb	4,47	^{204}Pb
^{235}U	^{207}Pb	0,70	^{204}Pb
^{232}Th	^{208}Pb	14,0	^{204}Pb
^{87}Rb	^{87}Sr	48,8	^{86}Sr
^{40}K	^{40}Ar	11,9	^{36}Ar
^{147}Sm	^{143}Nd	106,0	^{144}Nd

Tab. 5.3 - Métodos empregados em geocronologia. As grandezas indicadas se referem às variáveis da equação (5.28). O ^{40}K tem dois modos de decaimento mas só o modo mostrado na tabela é utilizado.

As rochas mais antigas da Terra têm idade inferior a 4 bilhões de anos, isto é, elas cristalizaram em forma definitiva centenas de milhões de anos após a formação do planeta. Para a medição da idade da Terra utilizam-se, curiosamente, amostras de material extra-terrestre. A Terra é permanentemente bombardeada por meteoritos, que são fragmentos de asteróides e cometas que encontra em sua órbita. Esses fragmentos preservaram sua estrutura desde sua formação, que se supõe coincidir com a formação do Sistema Solar. Os condritos, que são um tipo de meteorito, têm uma composição muito semelhante à da crosta terrestre. Por apresentar diversos minerais que contém rubídio em quantidades variáveis, os condritos se prestam à aplicação do *método rubídio-estrôncio*, onde a equação (5.28) é empregada para o decaimento beta do ^{87}Ru no ^{87}Sr . A figura 5.4 mostra o resultado da análise de vários condritos, onde em cada um deles diversos minerais são medidos. O alinhamento dos pontos indica uma idade comum para todas as amostras e uma garantia de que não houve perda (ou ganho) de estrôncio ou rubídio para o meio externo. A idade obtida, de $(4,53 \pm 0,02) \times 10^9$ anos, é considerada como sendo a da formação do meteorito e também, por hipótese, a da formação da Terra e dos demais corpos do Sistema Solar.

Para a datação de eventos recentes em materiais orgânicos é possível empregar o

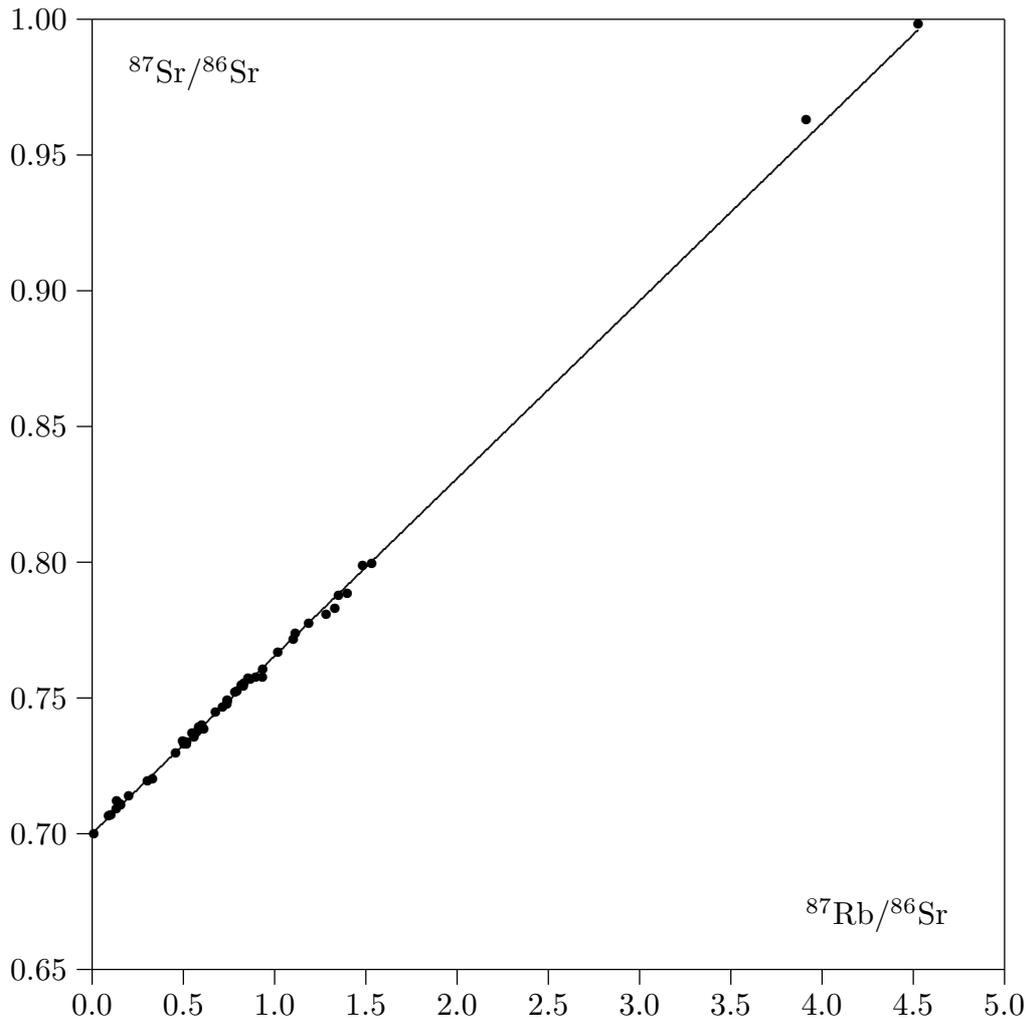


Fig. 5.4 - Aplicação da equação (5.28) à minerais contidos em diversos condritos. A inclinação da reta fornece uma idade comum de $(4,53 \pm 0,02) \times 10^9$ anos para as amostras e indica uma relação inicial $(^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr})_0$ de $0,7003 \pm 0,0002$ [We75].

método do ^{14}C , cujo desenvolvimento valeu o prêmio Nobel de química de 1960 a seu criador, o químico americano W. F. Libby. O gás carbônico (CO_2) que participa do ciclo vital da biosfera (as plantas absorvem CO_2 na fotossíntese e os animais exalam CO_2 na respiração) tem o seu carbono na proporção de 98,89 % de ^{12}C e 1,11 % de ^{13}C . O isótopo radioativo ^{14}C também existe em pequena proporção, devido ao constante bombardeio da alta atmosfera por raios cósmicos, que produzem ^{14}C quando o ^{14}N absorve um nêutron e emite um próton. O ^{14}C decai novamente no ^{14}N com uma meia-vida de 5730 anos, existindo um equilíbrio na quantidade de ^{14}C na atmosfera na proporção de 1 átomo para cada 10^{12} átomos de ^{12}C . Já que esse equilíbrio se manteve por milhares de anos, é de se supor que ele também se estendeu ao carbono da matéria orgânica viva.

Quando o organismo morre o equilíbrio cessa e o ^{14}C passa a decair sem ser reali-

mentado. Comparando a razão $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$, em um fóssil animal ou vegetal, com o valor de equilíbrio na atmosfera, pode-se, a partir da equação (5.3), determinar o tempo t transcorrido desde a morte do organismo. O método, naturalmente, só é aplicável se a atividade do ^{14}C não for muito baixa. Para tempos maiores do que cerca de 10 meias-vidas o método começa a se tornar inviável, embora com técnicas recentes, usando aceleradores como espectrógrafos de massa que contam os átomos de ^{14}C diretamente, se possa exceder esse limite. Como se trata de um método de determinação de idades relativamente recentes, suas avaliações podem ser comparadas, em muitos casos, com registros históricos ou com contagem de anéis em troncos de árvores. Essas comparações costumam mostrar um acordo muito bom.

Em tempos recentes, o equilíbrio entre os isótopos de carbono na atmosfera tem sido abalado por ação indireta do homem. A queima de carvão e petróleo tem aumentado a proporção de isótopos estáveis de carbono na atmosfera, pois os combustíveis fósseis são muito velhos para conterem ^{14}C . Testes com armas nucleares, por sua vez, aumentam a quantidade de ^{14}C na atmosfera de uma maneira não controlada. Esses fatos criam óbvias dificuldades para a aplicação do método no futuro.

5.8 - Propriedades dos Estados Instáveis - Largura de Nível

Nestas duas últimas seções vamos examinar algumas propriedades dos estados nucleares instáveis, ou seja, os estados responsáveis pela atividade das substâncias radioativas.

Um sistema quântico, descrito por uma função de onda que é auto-função do hamiltoniano, está em um dado estado de energia bem determinada e, se não sofrer influências externas, permanecerá indefinidamente naquele estado. Essa situação ideal não é, no entanto, a que prevalece nos núcleos excitados, ou no estado fundamental de um núcleo instável. Interações de diversas naturezas podem adicionar uma perturbação ao hamiltoniano e os auto-estados da energia puros deixam de existir. Nessa situação uma transição para um nível de energia mais baixa do mesmo ou de outro núcleo pode ocorrer.

Um estado instável vive, geralmente, um longo tempo, comparado à duração dos processos nucleares mais rápidos, digamos, o de uma partícula com velocidade próxima à da luz atravessar um diâmetro nuclear. Dessa forma, podemos admitir que um estado nuclear é aproximadamente estacionário, e escrever para sua função de onda:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iWt/\hbar}. \quad (5.29)$$

$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$ é a probabilidade de se encontrar o núcleo no volume dV e, se o estado descrito por Ψ decai com uma constante de desintegração λ , é válido escrever

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\Psi(\mathbf{r}, 0)|^2 e^{-\lambda t}. \quad (5.30)$$

Para atender simultaneamente à (5.29) e (5.30), W deve ser um complexo de parte imaginária $-\lambda\hbar/2$. Podemos escrever:

$$W = E_0 - \frac{\hbar\lambda}{2}i, \quad (5.31)$$

o que mostra que a função de onda (5.29) não é um estado estacionário de energia bem definida pois a exponencial contém uma parte real $-\lambda t/2$. Podemos, no entanto, escrever o expoente de (5.29) como uma superposição de valores correspondentes a energias E bem definidas (para $t \geq 0$):

$$e^{-(iE_0/\hbar + \lambda/2)t} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E)e^{-iEt/\hbar} dE. \quad (5.32)$$

Funções ligadas por uma transformada de Fourier se relacionam como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.33a)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt; \quad (5.33b)$$

isso permite estabelecer a forma da amplitude $A(E)$:

$$A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{+\infty} e^{[i(E-E_0)/\hbar - \lambda/2]t} dt, \quad (5.34)$$

onde o limite inferior indica que o estado estacionário foi criado no tempo $t = 0$. A integral (5.34) é de fácil resolução, fornecendo

$$A(E) = \frac{1}{h\lambda/2 - 2\pi i(E - E_0)}. \quad (5.35)$$

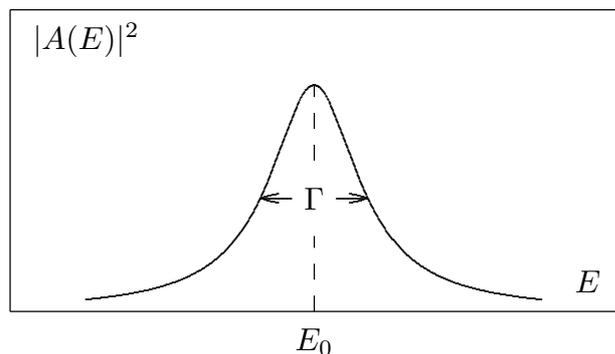


Fig. 5.5 - Forma da distribuição (5.36)

A probabilidade de em uma medida da energia encontrarmos um valor entre E e $E + dE$ é dada pelo produto

$$A^*(E)A(E) = \frac{1}{\hbar^2\lambda^2/4 + 4\pi^2(E - E_0)^2}, \quad (5.36)$$

e essa função da energia tem a forma de uma *Lorentziana*, com o aspecto mostrado na figura 5.5. Sua largura a meia-altura é $\Gamma = \hbar\lambda = \hbar/\tau$. A relação

$$\tau\Gamma = \hbar \quad (5.37)$$

entre a vida-média e a largura de um estado está diretamente vinculada ao Princípio da Incerteza e mostra que quanto mais tempo vive em média um estado, maior é a precisão com que fica determinada sua energia. Em particular, somente a estados estáveis se pode atribuir um único valor para a energia.

5.9 - Probabilidade de Transição - Regra de Ouro

A constante de desintegração λ foi apresentada ao início do capítulo como a probabilidade por unidade de tempo da ocorrência de uma transição entre estados quânticos e seus valores foram supostos serem dados experimentais conhecidos. Na presente seção vamos demonstrar que uma fórmula para calcular a constante de desintegração pode ser obtida a partir dos postulados da teoria de perturbação.

A seção anterior descreveu um estado instável pela adição de uma perturbação a um estado estacionário. Formalmente, podemos escrever

$$H = H_0 + V, \quad (5.38)$$

sendo H o hamiltoniano do estado instável, composto do hamiltoniano não perturbado H_0 e de uma pequena perturbação V . O hamiltoniano H_0 satisfaz a uma equação de auto-valores

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n, \quad (5.39)$$

cujas auto-funções formam uma base completa na qual a função de onda total Ψ , que satisfaz a

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (5.40)$$

pode ser expandida:

$$\Psi = \sum_n a_n(t)\psi_n e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (5.41)$$

Usando (5.38) e (5.41) em (5.40), e com o auxílio de (5.39), obtemos:

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n V a_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (5.42)$$

Aproveitando as propriedades de ortogonalização dos ψ_n , multipliquemos (5.42) à esquerda por ψ_k^* e integremos no espaço de coordenadas. Disso resulta

$$\dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n V_{kn} e^{i\frac{E_k - E_n}{\hbar} t}, \quad (5.43)$$

onde foi introduzido o elemento de matriz

$$V_{kn} = \int \psi_k^* V \psi_n d\tau. \quad (5.44)$$

Façamos agora as seguintes hipóteses sobre a atuação da perturbação V sobre o sistema: a perturbação começa a atuar no tempo $t = 0$, quando o sistema não perturbado é rígido por um auto-estado ψ_m . Ela se mantém num valor muito pequeno, constante, e depois de um curto intervalo de tempo, se anula em $t = T$. O conjunto dessas hipóteses permite afirmar que as condições

$$\begin{cases} a_m = 1 \\ a_n = 0, \quad \text{se } n \neq m, \end{cases} \quad (5.45)$$

verificadas rigorosamente para $t < 0$ valem aproximadamente também para $t > 0$. Dessa forma, (5.43) tem apenas uma parcela, e o valor da amplitude é obtido de

$$a_k = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V_{km} e^{i\frac{E_k - E_m}{\hbar} t} dt, \quad (5.46)$$

cujo valor deve ser necessariamente pequeno pela hipótese que se seguiu a (5.45). O resultado acima também é conhecido por teoria de perturbação de primeira ordem. A integral de (5.46) fornece

$$a_k = \frac{V_{km} (1 - e^{i\frac{E_k - E_m}{\hbar} T})}{E_k - E_m}. \quad (5.47)$$

É necessário agora que se interprete o significado da amplitude a_k . A quantidade $a_k^* a_k$ mede a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado k . Isso caracteriza uma transição ocorrida do estado inicial m para o estado k e o valor de $a_k^* a_k$ dividido

pelo intervalo T deve medir a constante de desintegração λ_k relativa ao estado k . A constante de desintegração total é obtida pela soma sobre todos os estados:

$$\lambda = \sum_{k \neq m} \lambda_k = \frac{\sum |a_k|^2}{T}. \quad (5.48)$$

Vamos agora admitir que haja um grande número de estados k disponíveis. Podemos, nesse caso substituir o somatório em (5.48) por uma integral. Definindo $\rho(E)$ como a densidade de estados disponíveis em torno da energia E_k , escrevemos

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \rho(E_k) dE_k = \frac{4}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |V_{km}|^2 \frac{\text{sen}^2 \left[\left(\frac{E_k - E_m}{2\hbar} \right) T \right]}{(E_k - E_m)^2} \rho(E_k) dE_k. \quad (5.49)$$

A função $\text{sen}^2 x/x^2$ só tem amplitude significativa próxima à origem. No caso de (5.49), se supusermos que V_{km} e ρ não variem significativamente em um pequeno intervalo da energia E_k próximo à E_m , essas duas quantidades podem sair da integral, e obtemos a expressão final

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{km}|^2 \rho(E_k) \quad (5.50)$$

que procuramos. (5.50) é conhecida como a *Regra de Ouro $n^{\circ}2$* (também conhecida como *Regra de Ouro de Fermi*), e permite determinar a constante de desintegração a partir das funções de onda dos estados inicial e final. No capítulo 11 mostraremos que o resultado (5.50) também pode ser utilizado para se obter em primeira ordem as seções de choque de processos induzidos pela interação de partículas através de um potencial V .

Sugestões para Leitura

- Walter Greiner e Aurel Sandulescu, “New Radioactivities” *Scientific American*, Março de 1990, pag. 34.
- Para um estudo da radioatividade na atmosfera e nos oceanos, leia: D. Lal e H. E. Suess, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **18** (1968) 283.
- Emilio Segré, “The Discovery of Nuclear Fission”, *Physics Today*, julho de 1989, pag. 38.
- A datação do sistema solar por radioatividade é bem descrita no artigo de revisão por G. W. Wetherill, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25** (1975) 283.
- John Archibald Wheeler, “Fission in 1939: The Puzzle and the Promise”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **39** (1989) XII.
- Emiko Okuno, “Radiação, Efeitos, Riscos e Benefícios”, Harbra, São Paulo.

- Para um estudo mais amplo de geocronologia veja C. M. R. Fowler, “The Solid Earth”, Cambridge University Press, 1990.

Exercícios

1 - A atividade de um certo material decresce por um fator 8 em um intervalo de tempo de 30 dias. Qual é a sua meia-vida, vida média, e constante de desintegração? Se a amostra continha inicialmente 10^{20} átomos, quantas desintegrações ocorreram em seu segundo mês de vida?

2 - As teorias de grande unificação predizem que o próton não é uma partícula estável, embora tenha uma meia-vida muito longa. Se essa meia-vida é de 10^{33} anos, quantos decaimentos de prótons se espera por ano numa massa de 10^3 toneladas cúbicas de água?

3 - Um elemento radioativo decai para um núcleo estável. Uma contagem de decaimentos de uma amostra desse elemento é feita durante intervalos de um minuto a cada hora. Os valores obtidos são: 93, 60, 49, 41, 27, 28, 20, 18, 11 Faça um gráfico “semilog” da contagem versus tempo e obtenha a partir dele uma estimativa da meia-vida da fonte. Lembrando que o erro em N contagens é igual a \sqrt{N} , os dados parecem razoáveis?

4 - O urânio natural é uma mistura de 99,3% de ^{238}U e 0,7% de ^{235}U . A meia-vida por emissão- α do primeiro é $4,5 \times 10^9$ anos e a do segundo 7×10^8 anos. a) Há quanto tempo atrás as quantidades dos dois isótopos em uma amostra eram idênticas? b) Se a amostra continha inicialmente 10 g de urânio natural, qual o peso do gás He produzido desde aquele tempo pelos dois isótopos?

5 - Um núcleo com constante de desintegração λ existe em $t = 0$. Qual é a probabilidade de ele desintegrar entre t e $t + \Delta t$?

6 - O $^{252}_{98}\text{Cf}$ tem meia-vida de 2,64 anos. Ele se desintegra por emissão- α em 96,9% dos eventos e por fissão espontânea em 31%. a) Qual é a sua vida-média? b) Qual é a razão entre o número de partículas- α e o de fissões produzidas em 1 minuto? c) Que meia-vida teria esse isótopo se não fissionasse espontaneamente?

7 - Mostre, a partir de (5.12), que: a) o máximo da atividade $A_2(t)$ da substância 2 ocorre no cruzamento das curvas de $A_1(t)$ e $A_2(t)$. b) quando $\lambda_1 \cong \lambda_2$ esse cruzamento ocorre em $t = \tau$, sendo τ a vida-média comum das duas substâncias. c) quando $\lambda_1 > \lambda_2$, a razão $A_2(t)/A_1(t)$ cresce sem limite. d) quando $\lambda_1 < \lambda_2$, a razão $A_2(t)/A_1(t)$ cresce tendendo ao limite $\tau_1/(\tau_1 - \tau_2)$. Próximo a esse limite a razão entre as atividades é praticamente constante (> 1), constituindo o que se denomina de *equilíbrio transiente*, do qual o equilíbrio secular ($\tau_1 \gg \tau_2$) é um caso particular.

8 - Explique de que modo a equação (5.16) pode ser entendida como um caso limite da equação (5.12).

9 - O equilíbrio secular pode também ser definido através da condição

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{N_3}{N_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{N_4}{N_3} \right) = \dots = 0 .$$

Supondo que $\lambda_1 \ll \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$, mostre explicitamente que as relações (5.18) são reproduzidas. O que acontece com o estado final da cadeia de decaimentos?

10 - Usando as tabelas 5.1a e 5.1b determine: a) para 1g de urânio natural as atividades α e β em Ci. b) A massa de urânio natural que teria uma atividade global de 10^{-2} Rd.

11 - Construa o que seria a série $4n + 1$ do ${}_{93}^{237}\text{Ne}$ em uma forma semelhante a apresentada nas tabelas 5.1.

12 - Determine a dose equivalente (em mSv) que o tecido humano recebe quando situado em um local onde radiação-X produz uma ionização de $2,6 \times 10^{-7}$ C/Kg no ar.

13 - Uma relíquia de madeira contém 1 g de carbono com uma atividade de 4×10^{-12} Ci. Se em árvores vivas a razão ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C}$ é de $1,3 \times 10^{-12}$, qual é a idade da relíquia? A meia-vida do ${}^{14}\text{C}$ é 5730 anos.

6 - DECAIMENTO ALFA

6.1 - Introdução

A emissão de uma partícula- α é um processo de desintegração nuclear possível de ocorrer sempre que a equação (4.7) é satisfeita. A grande quantidade de núcleos α -emissores, em contraste com a existência muito restrita de emissores de outros fragmentos leves, deve-se ao fato de a grande energia de ligação da partícula alfa tornar o processo energeticamente vantajoso em praticamente todos os núcleos com $A \gtrsim 150$. A tabela 6.1 mostra, baseada no balanço de massas, a energia disponível para emissão de diversos núcleos pelo ^{239}Pu . Podemos ver que a emissão- α é a única energeticamente possível.

Muito raros são os casos detectados de emissão de fragmentos de $A > 4$. Exemplos são as emissões de ^{14}C por vários isótopos do Ra e e a de ^{24}Ne por isótopos do Th e U. A probabilidade de emissão desses fragmentos é várias ordens de grandeza menor do que a probabilidade de decaimento alfa e isso justifica só terem esses processos sido descobertos recentemente [Pr89].

				n ^{238}Pu -5.69	^{239}Pu
		^3H ^{236}Np -9.79	d ^{237}Np -9.42	p ^{238}Np -6.16	
^6He ^{233}U -5.93	^5He ^{234}U -0.95	^4He ^{235}U 5.24	^3He ^{236}U -8.79		
^7Li ^{232}Pa -2.26	^6Li ^{233}Pa -2.99	^5Li ^{234}Pa -3.45			

Tab. 6.1 - Energia disponível para a emissão de partículas pelo ^{239}Pu . Os quadros mostram a partícula emitida, o núcleo residual e a energia (em MeV) liberada no processo. Note que somente a emissão- α (^4He) tem esse último valor positivo.

Os fatores experimentais relevantes em qualquer processo de decaimento são a energia cinética da partícula emitida e a meia-vida do processo. A figura 6.1 mostra que

essas duas grandezas estão correlacionadas, na desintegração- α , pela *Regra de Geiger-Nuttall* [GN11], que estabelece uma relação inversa entre a meia-vida e a energia total disponível para o processo.

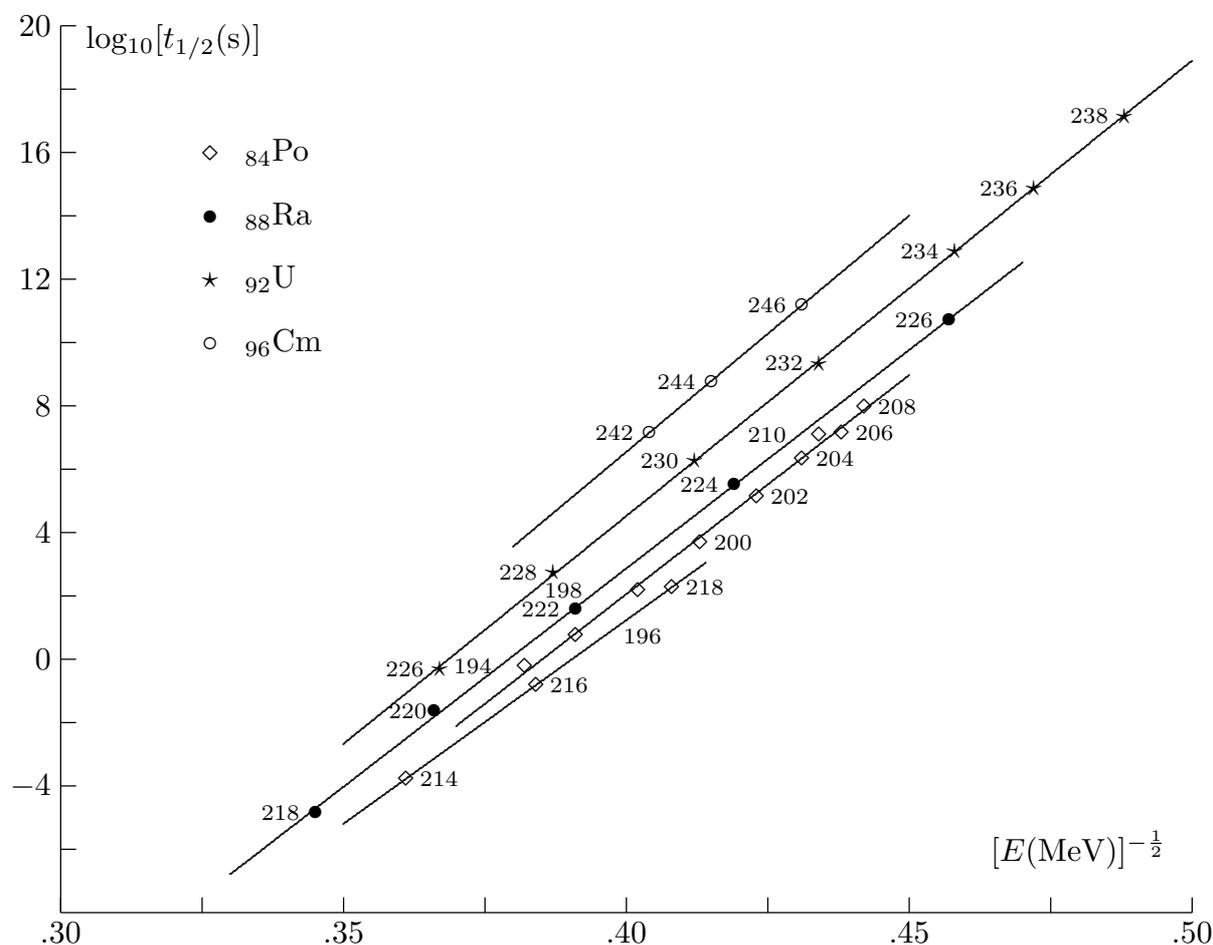


Fig. 6.1 - Relação entre o logaritmo da meia-vida de decaimento- α e a raiz do inverso da energia de desintegração para núcleos par-par. A Regra de Geiger-Nuttall estabelece que os isótopos de um dado elemento estão situados em uma reta. Núcleos ímpares e ímpar-ímpar também obedecem à regra mas a relação linear é menos clara. Os isótopos do Po se situam em duas retas, resultado do efeito de camadas na passagem pelo número mágico de nêutrons $N = 126$.

Uma teoria para a emissão- α deve explicar, primeiro, porque ela efetivamente ocorre; depois, o porquê da enorme faixa (cerca de vinte ordens de grandeza) de valores possíveis para a meia-vida e a relação desta com a energia da partícula emitida, dada pela Regra de Geiger-Nuttall.

6.2 - Teoria do Decaimento- α

Neste parágrafo vamos mostrar que uma teoria baseada em conceitos elementares de Mecânica Quântica é suficiente para explicar as principais propriedades ligadas ao

decaimento- α . Essa teoria foi desenvolvida por Gamow [Ga28] e, independentemente, por Condon e Gurney [CG28], em 1928. Ela tem como ponto de partida a hipótese de que a partícula- α está pré-formada no interior do núcleo e pode sair do mesmo atravessando a barreira formada pelos potenciais coulombiano e nuclear. De fato, muitos núcleos apresentam uma estrutura peculiar, como se fossem formados por aglomerados de partículas- α . Muitas das propriedades do ^{12}C e ^{16}O podem, por exemplo, ser explicadas, supondo serem os mesmos aglomerados de 3 e 4 alfas, respectivamente.

Uma sofisticação da teoria é a introdução de um *fator de pré- formação* [Pe50], que é, no presente caso, a probabilidade de que dois nêutrons e dois prótons reünam as condições para serem emitidos pelo núcleo na forma de uma partícula- α . Não existe ainda uma maneira satisfatória de calcular o fator de pré- formação e vamos nos limitar a desenvolver a teoria original. Veremos que, apesar dessa simplificação, consegue-se resultados que explicam qualitativamente o comportamento das meias-vidas de uma grande faixa de emissores- α .

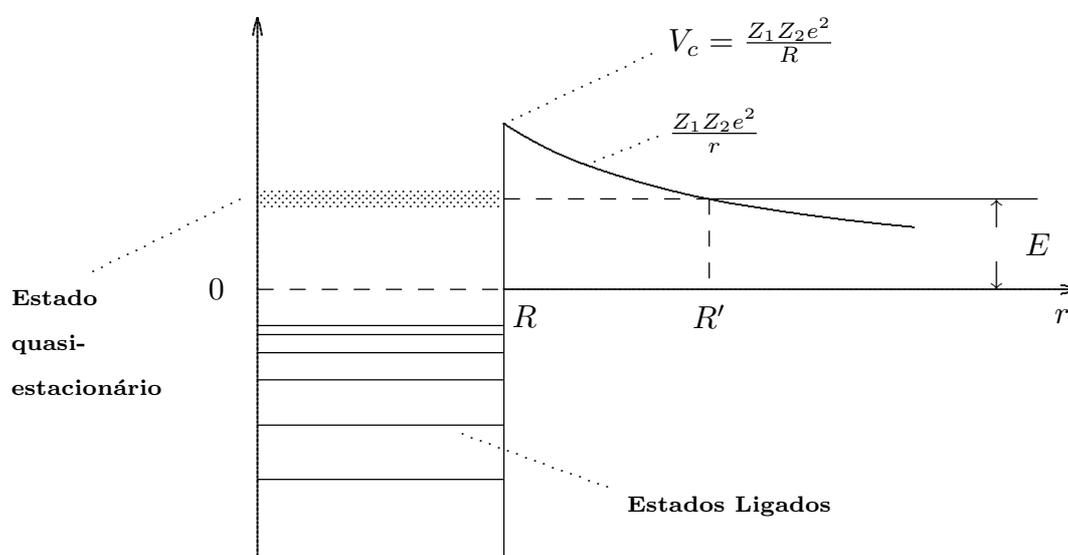


Fig. 6.2 - Barreira de potencial para uma partícula- α no interior do núcleo.

O potencial de interação entre a partícula- α e o resto do núcleo pode ser aproximadamente descrito pela figura 6.2. Dentro do núcleo o potencial é atrativo e fora dele a partícula- α ($Z_1 = Z_\alpha$) sente a repulsão coulombiana do núcleo residual de carga Z_2 . O potencial da figura 6.2 é a combinação desses dois potenciais. Em um núcleo instável a partícula- α ocupa inicialmente um estado quasi-estacionário, com energia $E > 0$. Em cada choque com a parede existe uma probabilidade não nula de que ela, pelo efeito túnel, atravesse a barreira e seja libertada com energia cinética E_α , com $E - E_\alpha$ ficando como energia de recuo do núcleo residual. Esse último valor é, de modo geral, bem menor do que a energia da partícula- α . A probabilidade de decaimento de um núcleo instável por emissão- α na unidade de tempo é dada por

$$P_\alpha = \lambda \cong \frac{v}{R} T, \quad (6.1)$$

indicando que a constante de desintegração é o produto da probabilidade de conseguir atravessar a barreira (dada pelo coeficiente de transmissão T) pelo número de tentativas que faz a partícula para atravessá-la (dada pelo número de colisões com a superfície na unidade de tempo, que é aproximadamente igual a v/R , sendo v a velocidade da partícula no interior do núcleo e R o raio do núcleo).

Para calcular o coeficiente de transmissão resolvamos preliminarmente o problema ideal da barreira retangular mostrada na figura 6.3

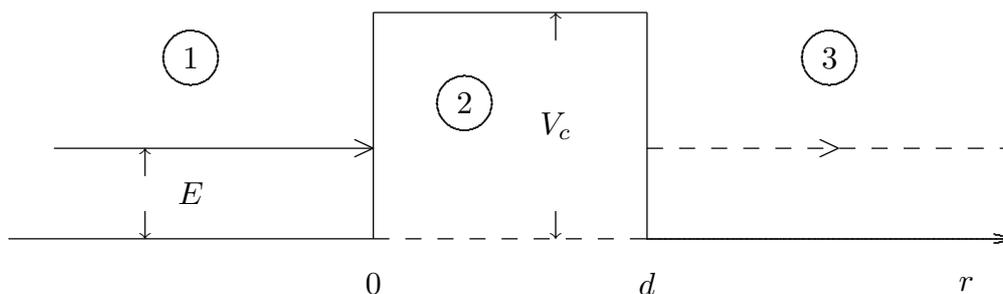


Fig. 6.3 - Barreira de potencial na coordenada radial.

Tratemos o caso mais simples, o de $l = 0$. A parte radial da equação de Schrödinger

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] = 0 \quad (6.2)$$

tem como solução na região 1

$$u_1(r) = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, \quad (6.3)$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (6.4)$$

com m representando a massa reduzida do sistema partícula-núcleo. Na região 2 a solução é

$$u_2(r) = \alpha_2 e^{+k_2 r} + \beta_2 e^{-k_2 r}, \quad (6.5)$$

onde

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \quad (6.6)$$

Na região 3, finalmente, temos a solução

$$u_3 = \alpha_3 e^{ik_1 r}. \quad (6.7)$$

Usando as condições de continuidade da função e da derivada

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_2(0) & u_1'(0) &= u_2'(0) \\ u_2(d) &= u_3(d) & u_2'(d) &= u_3'(d), \end{aligned} \quad (6.8)$$

obtemos

$$2\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \left(1 + \frac{iq}{2}\right)e^{(ik_1+k_2)d} + \left(1 - \frac{iq}{2}\right)e^{(ik_1-k_2)d}, \quad (6.9)$$

onde

$$q = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}. \quad (6.10)$$

Isso implica em

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right|^2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^* \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right) = 1 + \frac{1}{4} \left[2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \right] \sinh^2(k_2d), \quad (6.11)$$

onde utilizamos

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

Como $(k_2/k_1)^2 = (V_0 - E)/E$, o coeficiente de transmissão será dado por

$$T = \left|\frac{\alpha_3}{a_1}\right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \sinh^2(k_2d) \right]^{-1}. \quad (6.13)$$

Quando o “comprimento de onda” $\lambda_2 = 1/k_2$ é muito menor que a largura da barreira, isto é, quando

$$k_2d \gg 1, \quad \text{ou seja,} \quad d \gg \frac{1}{k_2} = \lambda_2, \quad (6.14)$$

temos que

$$\sinh^2(k_2d) \cong \frac{1}{4}e^{2k_2d} \quad (6.15)$$

ou

$$T \cong 4 \frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2} e^{-2k_2d}. \quad (6.16)$$

O fator numérico não será de nosso interesse na futura generalização do problema e escrevemos por hora

$$T \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}d}, \quad (6.17)$$

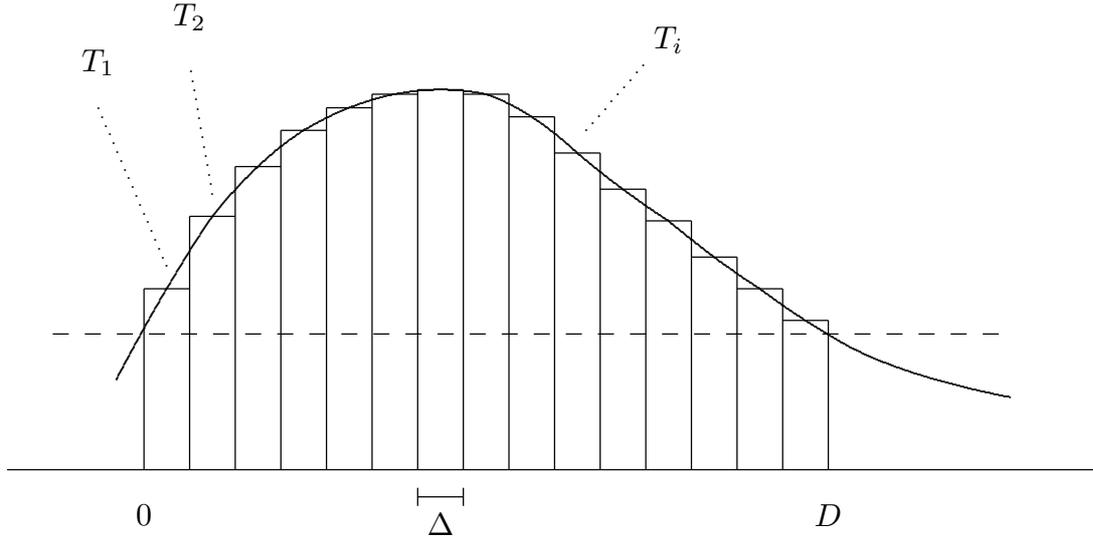


Fig. 6.4 - Barreira de forma arbitrária subdividida em barreiras retangulares.

indicando que o coeficiente de transmissão cai exponencialmente com a largura da barreira.

Uma barreira de forma arbitrária pode ser subdividida em barreiras retangulares de largura pequena, como mostra a figura 6.4. O coeficiente de transmissão total será dado por

$$\begin{aligned}
 T &\cong \text{constante} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \dots \\
 &\cong \text{constante} \cdot \prod_i e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_i - E)} \Delta}
 \end{aligned}$$

e, no limite $\Delta \rightarrow 0$,

$$T \cong \text{constante} \cdot e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^D \sqrt{2m[V(r) - E]} dr}. \quad (6.18)$$

Um cálculo mais cuidadoso utilizando a teoria WKB [PC61] mostra que a constante em (6.18) é da ordem de 1.

Quando $l \neq 0$,

$$T \propto e^{-2 \int k(r) dr}, \quad (6.19)$$

onde

$$k^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \hbar^2 - E \right], \quad (6.20)$$

diferindo de (6.18) apenas pela adição do potencial centrífugo à $V(r)$.

Para aplicações práticas podemos supor, para simplificar, que a barreira tem a forma do potencial coulombiano entre R e R' (figura 6.2). No caso de momento orbital $l = 0$, temos

$$T_\alpha \propto e^{-2G}, \quad (6.21)$$

onde fica definido o *fator de Gamow*

$$G = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E} dr. \quad (6.22)$$

Integrando (6.22) obtemos

$$G = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_1 Z_2 e^2 \gamma(x), \quad (6.23)$$

onde

$$\gamma(x) = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}, \quad (6.24)$$

sendo $x = R/R' = E/V_c$, com

$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})}. \quad (6.25)$$

Para o cálculo de (6.1) obtemos o valor de v observando que

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R'} = E = \frac{1}{2} m v^2, \quad (6.26)$$

resultando finalmente para a constante de desintegração,

$$\lambda \cong \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2E}{m}} \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_1 Z_2 e^2 \gamma \left(\frac{R}{R'} \right) \right]. \quad (6.27)$$

Da forma (6.27) pode-se entender a regra de Geiger-Nuttall (figura 6.1): o logaritmo da constante de desintegração λ varia com o inverso da raiz quadrada da energia E , a menos de uma parcela de variação lenta que contém $\log E$ e da presença da função $\gamma(\frac{R}{R'})$, igualmente função de E , mas que também varia lentamente.

Z	A	$E(\text{MeV})$	$t_{1/2}[\text{exp(s)}]$	$t_{1/2}[\text{calc(s)}]$ $r_0 = 1,2 \text{ fm}$	$t_{1/2}[\text{calc(s)}]$ $r_0 = 1,3 \text{ fm}$
84	215	7,53	0,18	$0,45 \times 10^{-5}$	$0,18 \times 10^{-6}$
84	218	6,11	182,0	1,79	0,072
89	211	7,63	0,25	$0,3 \times 10^{-3}$	10^{-5}
89	218	9,38	$0,3 \times 10^{-6}$	$0,9 \times 10^{-9}$	$0,3 \times 10^{-10}$
94	238	5,59	$2,8 \times 10^9$	$3,9 \times 10^7$	$1,2 \times 10^6$
94	239	5,25	$7,6 \times 10^{11}$	$5,5 \times 10^9$	$1,7 \times 10^8$

Tab. 6.2 - Meias-vidas calculadas para dois valores de r_0 e sua comparação com valores experimentais.

A tabela 6.2 mostra a aplicação de (6.27) a alguns isótopos de elementos pesados. O cálculo foi feito para dois valores da constante r_0 ($R = r_0 A^{1/3}$). Vemos que a meia-vida pode variar por um fator 30 quando se alteram os raios dos núcleos em 10%. Essa extrema sensibilidade, resultante do caráter exponencial de (6.27), deve se refletir especialmente no fato de que o modelo foi desenvolvido para núcleos esféricos e os alfa-emissores se situam, boa parte deles, em regiões onde os núcleos são deformados no estado fundamental. Nesse sentido, as discrepâncias com os valores experimentais observadas na tabela 6.2 devem conter uma contribuição que vem da forma do núcleo emissor. Outro fator importante não considerado na obtenção de (6.27) é o momento angular carregado pela partícula- α , que pode impor regras de seleção para a população de estados excitados do núcleo produto. Esse aspecto será examinado na seção seguinte.

6.3 - Momento Angular e Paridade no Decaimento- α

Seja I_i o momento angular de um emissor- α e I_f o momento angular do estado (não necessariamente o fundamental) final do núcleo-filho. O momento angular orbital l carregado pela partícula- α se situa nos limites

$$|I_i - I_f| \leq l \leq I_i + I_f. \quad (6.28)$$

As paridades inicial, Pi_i , e final, Pi_f , estão, por sua vez, relacionadas à paridade $(-1)^l$, associada à função de onda da partícula- α :

$$\Pi_i = (-1)^l \Pi_f. \quad (6.29)$$

$E(\text{keV})$	I, π	$i\%$	$E(\text{keV})$	I, π	$i\%$
0	0^+	74.0	941.5	0^+	0.000052
44.08	2^+	25.0	962.8	1^-	0.000001
145.96	4^+	0.035	968.1	(2^-)	—
303.6	6^+	0.0031	983.0	2^+	0.0000016
513	8^+	0.00002	985.5	2^-	—
605.18	1^-	0.00024	1028.5	2^+	0.0000034
661.4	3^-	0.000012	1069.95	3^+	—
763.2	(5^-)	2×10^{-7}	1078	12^+	—
772	10^+	—	1125.8	4^+	3.4×10^{-7}

Tab. 6.3 - Energia E , momento angular I e paridade π dos estados do ^{238}Pu e a intensidade i da emissão- α do ^{242}Cm que alimenta os mesmos. Parêntesis assinalam informações ainda duvidosas.

A necessidade de obediência a (6.28) e (6.29) pode impor restrições aos possíveis estados de um núcleo alimentados por um decaimento- α . Examinemos, como exemplo, a tabela 6.3 onde estão listados os níveis do ^{238}Pu e a intensidade do decaimento- α do ^{242}Cm que alimenta cada um deles. Alimentar um estado excitado significa aqui emitir uma partícula- α e deixar o núcleo residual naquele estado excitado. A energia da partícula- α correspondente será a diferença entre a energia máxima (para o estado fundamental do ^{238}Pu) e a energia do estado excitado correspondente. Vemos que os estados excitados do ^{238}Pu não são todos populados com a mesma probabilidade. A intensidade da população de cada nível vai diminuindo para níveis de energia mais altos. Isso se deve em parte à barreira centrífuga $l(l+1)\hbar^2/2mr^2$ contida na equação (6.20), não computada no caso especial $l=0$ da equação (6.27). A barreira centrífuga equivale efetivamente a um aumento na altura e espessura da barreira a ser vencida pela partícula- α , causando uma diminuição na probabilidade de alimentação de níveis à medida que aumenta o valor do momento angular orbital l . Sejam, por exemplo, os níveis 2^+ , 4^+ , 6^+ , 8^+ , 10^+ e 12^+ do ^{238}Pu (tabela 6.3), que constituem uma banda de rotação; os valores de l são iguais, por (6.28), aos próprios valores dos momentos angulares de cada estado, e é explicável o porquê do decréscimo da intensidade com o aumento do spin do nível. A intensidade de emissão para os níveis 10^+ e 12^+ chega a se situar abaixo do limite de detecção.

Um outro fator em jogo é a natureza dos níveis inicial e final do decaimento. Uma boa interceptação das funções de onda desses estados contribui, de acordo com (5.50), para facilitar a passagem do sistema de um estado para o outro. Esse não é o caso, por exemplo, para o grupo de níveis acima da banda de rotação do estado fundamental do ^{238}Pu . Sendo constituído de estados de vibração e de partícula independente, eles são descritos por funções de onda que tem pouco em comum com a função de onda do ^{242}Cm . A intensidade para esses estados, mesmo os de I_f baixos é muito pequena. Uma observação final sobre a tabela 6.3 é a de que os dois estados 2^- e o estado 3^+ não são populados. Nesse caso é fácil ver que um decaimento para esses estados é proibido pelas equações (6.28) e (6.29). Deve-se ter em mente, no entanto, que decaimentos com intensidade muito fraca que violam (6.29) podem ocorrer pela presença de uma parcela adicional na função de onda devida à interação fraca (cerca de 10^7 vezes menor do que a da interação forte), que não conserva paridade (ver capítulo 7).

Quando os estados inicial e final são diferentes de zero, o valor l do momento orbital da partícula- α não é único, e temos uma série de valores possíveis dados por (6.28). A figura 6.5 mostra o decaimento do einstânio-253 no berkélio-249. Ao lado de cada nível estão os valores de l possíveis e as intensidades respectivas. Esses valores não podem, é claro, ser determinados pela energia das partículas- α correspondentes, pois elas são iguais. A separação dos ramos é feita, nesse caso, pela análise da distribuição angular das partículas- α emitidas quando o emissor se encontra polarizado (com os spins de todos os núcleos paralelos) pela aplicação de um campo elétrico ou magnético em baixas temperaturas. Sendo a parte angular da função de onda dada por um harmônico esférico Y_l^m , diferentes valores de l darão diferentes probabilidades de se detectar as partículas- α em função do ângulo de emissão.

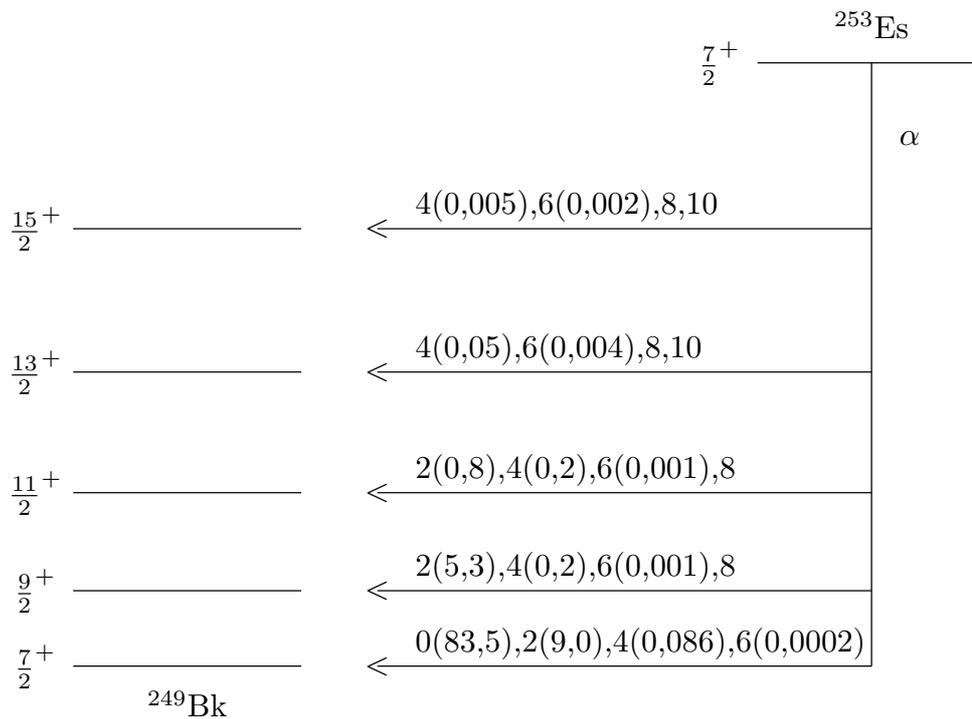


Fig. 6.5 - Intensidades (%) das várias componentes de momento angular no decaimento- α do ^{253}Es . Para $l \geq 8$ as intensidades são muito pequenas e não puderam ser medidas [So70].

Essas medidas de distribuição angular também refletem um outro aspecto, não levado em conta na equação (6.27): quando o núcleo é deformado, a barreira de Coulomb é menor na região de maior curvatura (ponta) do núcleo. Isso faz com que a intensidade possa ser várias vezes maior para emissão em ângulos onde a barreira é reduzida. Esse aspecto pode ser de grande importância, já que a maior parte dos emissores- α é constituída de núcleos pesados deformados.

Sugestões para Leitura

- R. D. Evans, “The Atomic Nucleus”, McGraw-Hill, New York, 1955, cap. 17.
- H. J. Mang, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **14** (1964) 1.
- J. O. Rasmussen, “Alpha- Decay” em “Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy”, editado por K. Siegbahn, *North-Holland*, Amsterdam, 1965, Cap. XI.
- P. B. Price, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **39** (1989) 19.

Exercícios

- 1 - Determine a velocidade e o momento linear de uma partícula- α de 5 MeV. É importante o uso de fórmulas relativísticas nesse caso?
- 2 - Utilizando uma tabela de massas mostre que a energia liberada na emissão- α do ^{239}Pu é de 5,24 MeV. A energia da partícula- α medida é de 5,16 MeV: verifique se se pode atribuir a diferença à energia de recuo do ^{235}U .
- 3 - a) Usando o valor para a profundidade do poço nuclear mostrado na figura 4.8, calcule a energia cinética e o momento linear da partícula- α no interior do ^{235}U no problema 1. b) Qual é o comprimento de onda dessa partícula dentro do núcleo? Compare com o diâmetro do núcleo e interprete. c) Qual é o comprimento de onda da partícula depois de emitida?
- 4 - Uma conhecida aplicação do princípio da incerteza mostra que um elétron não pode estar confinado ao interior de um núcleo. Faça essa mesma aplicação para o caso de uma partícula- α no interior de um núcleo pesado e compare as duas situações.
- 5 - Utilize a expressão (6.25) para calcular a altura da barreira de Coulomb para a emissão- α pelos núcleos ^{40}Ca , ^{112}Sn e ^{232}Th .
- 6 - a) Mostre que a emissão de ^{14}C pelo ^{222}Ra é energeticamente possível. b) Calcule a meia-vida do processo supondo que ele ocorre através de um mecanismo semelhante à emissão- α . c) Compare com a meia-vida experimental $t_{1/2} = 3200$ anos e interprete uma eventual discrepância. d) Verifique se o número de prótons e nêutrons do núcleo residual poderia ter alguma influência no processo.
- 7 - Um núcleo X emite partículas- α de energias (em MeV): 5,42; 5,34; 5,21; 5,17 e 5,14. Cada emissão- α pode ser acompanhada da emissão de um ou mais raios- γ de energias (em MeV): 0,20593; 0,0744; 0,166407; 0,21598; 0,13161 e 0,08437. Faça um diagrama onde sejam representados os níveis do núcleo produto, os decaimentos- γ entre eles e as energias respectivas das partículas- α que os alimentam.
- 8 - O decaimento- α do estado fundamental ($\frac{7}{2}^+$) do ^{253}Es leva a uma seqüência de estados de paridade par do ^{249}Bk , como mostra a figura 6.5. Mas, esse decaimento também alimenta uma banda de paridade negativa com $I = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$. Ache, para cada estado dessa banda, os valores permitidos de l .

7 - DECAIMENTO BETA

7.1 - Introdução

A forma mais comum de desintegração radioativa é o decaimento- β , detectado em isótopos de praticamente todos os elementos, com a exceção até agora dos muito pesados ao final da carta de núclídeos. Ele consiste na emissão de um elétron e um antineutrino (decaimento- β^-) ou na emissão de um pósitron e um neutrino (decaimento- β^+), mantendo o núcleo, em ambos os casos, o mesmo número de núcleons, de acordo com as equações

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu} \quad (3.36)$$

e

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + e^+ + \nu. \quad (3.37)$$

Os mecanismos de emissão α e β diferem em um aspecto essencial: enquanto os núcleons que formam a partícula- α já fazem parte da matéria nuclear, o elétron (ou pósitron), proibido de existir no interior do núcleo, é criado no instante da emissão por intermédio da chamada *interação fraca*, uma das quatro forças fundamentais de ação entre partículas, ao lado das forças nuclear, eletromagnética e gravitacional. É ela a responsável pela transformação de um nêutron em um próton com a emissão de um elétron e um antineutrino, descrita por (4.29), ou a transformação de um próton em um nêutron com a emissão de um pósitron e um neutrino, descrita por (4.30).

Assim como os píons são os mediadores da força nuclear, existe um tripleto de partículas, W^+ , W^- e Z^0 , responsável pela interação fraca, atuando como “quanta” dessa força. A existência dessas partículas foi predita em 1967 por S. Weinberg [We67] e, independentemente, por A. Salam e S. Glashow [Gl80], e detectadas em 1983 no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN) pelo estudo da colisão de feixes de prótons de altíssimas energias. Os *bósons vetoriais intermediários*, como também são conhecidas essas partículas, são muito pesados, tendo massas

$$m_{W^\pm} c^2 = (80, 8 \pm 2, 7) \text{ GeV}, \quad (7.1)$$

$$m_{Z^0} c^2 = (92, 9 \pm 1, 6) \text{ GeV}. \quad (7.2)$$

Vimos no capítulo 2 como um valor não nulo da massa dos mésons implicava em um alcance finito para a força nuclear, consequência do Princípio da Incerteza. Essa mesma aplicação ao presente caso indica, dadas as massas muito grandes envolvidas, ser a interação fraca uma força de alcance extremamente curto ($\sim 10^{-3}$ fm). Veremos,

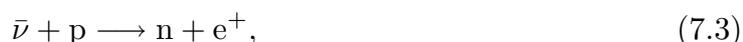
no entanto, que uma teoria básica para o decaimento- β pode ser desenvolvida sem o conhecimento detalhado da forma dessa interação.

7.2 - Energia Liberada no Decaimento Beta

Um processo de desintegração que leva de um estado de energia ϵ_2 de um núcleo a um estado de energia ϵ_1 do núcleo filho, libera uma quantidade bem determinada de energia $\epsilon_0 = \epsilon_2 - \epsilon_1$. Quando a partícula emitida é única, como no caso da desintegração- α , ela carrega esse valor como sua energia cinética (desprezando-se o recuo do núcleo residual). Quando mais de uma partícula é emitida, como no decaimento- β , há um espectro contínuo de valores possíveis para as energias cinéticas das partículas. A figura (7.1) mostra exemplos típicos de curvas para decaimentos β^+ e β^- .

*Fig. 7.1 - Distribuição de energia do elétron e do pósitron no decaimento do ^{64}Cu . A parte de baixa energia do espectro dos elétrons é aumentada devido ao freiamento provocado pela atração do núcleo. Para o pósitron o efeito é inverso. Os pontos experimentais são de L. M. Langer et al., Phys. Rev. **76** (1949) 1725.*

Foi com base na existência de um espectro contínuo de energia dos elétrons que W. Pauli [Pa33] propôs, em 1931, a existência de uma segunda partícula no decaimento- β , batizada posteriormente de *neutrino* por E. Fermi [Fe34], que desenvolveu uma primeira teoria para o processo. Como os níveis de energia de um núcleo são discretos, as energias do elétron e de recuo do núcleo no referencial do centro de massa deveriam também ser discretas, por conservação de energia e momento, a menos que uma terceira partícula (o neutrino) estivesse presente para dividir o momento e a energia do decaimento. Os neutrinos não eram conhecidos até então porque são partículas sem carga e sem momento magnético, que só interagem através da força fraca e são, por isso, capazes de atravessar qualquer aparato experimental comum sem serem detectados. Seu registro se deu pela primeira vez em 1953, quando Reines e Cowan [RC53], utilizando um cintilador líquido de 1 m^3 , rico em prótons, puderam observar os produtos resultantes do “decaimento- β inverso”



onde os antineutrinos necessários à reação foram fornecidos pelo decaimento- β dos produtos de fissão de um reator nuclear.

Os neutrinos são férmions de carga zero e spin $\frac{1}{2}$. A massa do neutrino pode ser obtida, em princípio, do balanço de massa de uma desintegração- β

$$Q = m_{Z,A}c^2 - m_{Z\pm 1,A}c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2, \quad (7.4)$$

onde o valor de Q é conhecido. Os resultados indicam que, se essa massa existe, seu valor é muito pequeno ou nulo. A distinção entre essas duas possibilidades tem implicações teóricas importantes, como veremos adiante.

Voltemos à equação (7.4), fazendo agora $m_\nu = 0$. Essa equação pode ser mais apropriadamente escrita em termos das massas atômicas $M_{Z,A}$ (que são as efetivamente medidas):

$$M_{Z,A} = m_{Z,A} + Zm_e - \sum_1^Z B_i, \quad (7.5)$$

onde B_i é a energia de ligação do i -ésimo elétron. Dessa forma, (7.4) se reescreve:

$$Q = \left\{ M_{Z,A} - Zm_e + \sum_1^Z B_i - [M_{Z\pm 1,A} - (Z \pm 1)m_e + \sum_1^{Z\pm 1} B_i] - m_e \right\} c^2. \quad (7.6)$$

Desprezando as energias de ligação dos últimos elétrons podemos igualar os dois somatórios e explicitar (7.6) para as duas formas de desintegração :

$$Q_{\beta^-} = (M_{Z,A} - M_{Z+1,A})c^2, \quad (7.7a)$$

$$Q_{\beta^+} = (M_{Z,A} - M_{Z-1,A} - 2m_e)c^2, \quad (7.7b)$$

mostrando que o decaimento- β^- é possível se simplesmente a massa atômica do núcleo pai for maior do que a do filho. Para o decaimento β^+ há uma parcela adicional de duas massas eletrônicas no cômputo de Q . Em ambos os casos o valor de Q é repartido na forma de energia cinética do elétron (pósitron), do antineutrino (neutrino) e de uma parcela muito pequena de energia de recuo do núcleo residual.

7.3 - Teoria de Fermi para o Decaimento Beta

Uma teoria simples para o decaimento- β foi sugerida por Fermi [Fe34] em 1934. Embora essa teoria seja incompleta (não permite a violação da paridade, por exemplo), ela é capaz de descrever os espectros da figura 7.1, e dá uma compreensão qualitativa dos valores das meias-vidas do decaimento. Fermi admitiu uma analogia do decaimento- β

com a emissão de radiação eletromagnética pelo núcleo, induzida pela interação dependente do tempo entre o sistema que irradia e o campo eletromagnético. No caso do decaimento- β a força fraca é o agente responsável pelo decaimento. Ela pode ser entendida como uma perturbação, isto é, ela é pequena comparada com as forças envolvidas na manutenção dos estados quasi-estacionários inicial e final. A expressão (5.50) para a constante de desintegração,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \frac{dN}{dE_T}, \quad (7.8a)$$

com

$$\mathcal{M}_{if} = \int \Psi_f^* \mathcal{V} \Psi_i d^3r, \quad (7.8b)$$

pode ser aplicada, com \mathcal{V} sendo o operador associado à força fraca, dN/dE_T a densidade de estados finais acessíveis na energia de desintegração E_T , Ψ_i a função de onda do núcleo pai e Ψ_f a função de onda do sistema final, composto pelo núcleo residual, o elétron (ou pósitron) e o antineutrino (ou neutrino):

$$\Psi_f = \Psi_R \Psi_e \Psi_\nu. \quad (7.9)$$

Examinemos inicialmente a integral em (7.8): as funções de onda do produto (7.9) devem ser normalizadas; sendo Ψ_e e Ψ_ν funções de onda de partícula livre - a correção para a influência do campo coulombiano do núcleo será comentada adiante - a normalização pode ser realizada em uma caixa cúbica de lado a . Sendo indiferente trabalhar com ondas progressivas ou estacionárias, uma expressão do tipo (4.11) (onda plana) para Ψ_e e Ψ_ν pode ser empregada. Nesse caso a normalização fornece $A = 1/\sqrt{V}$, sendo $V = a^3$ o volume da caixa. Dessa forma as funções de onda dos léptons se escrevem

$$\Psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}/\hbar}, \quad (7.10a)$$

$$\Psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}/\hbar}, \quad (7.10b)$$

sendo \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_ν os momentos do elétron e do neutrino. O produto delas que aparece em (7.9) pode ser colocado na forma de uma série de potências

$$\Psi_e \Psi_\nu = \frac{1}{V} \left[1 + \frac{i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu) \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right]. \quad (7.11)$$

Se levarmos em conta que os comprimentos de onda associados aos léptons são muito grandes comparados com as dimensões nucleares (um elétron de 1 MeV, por exemplo,

tem $\lambda = 897$ fm), veremos que nas imediações do núcleo a primeira parcela de (7.11) é largamente predominante; Ψ_e e Ψ_ν podem ser consideradas constantes e o produto delas igual a $1/V$. Uma expansão da onda plana em ondas parciais (ver capítulo 9) mostra que essa primeira parcela faz parte da componente $l = 0$ da expansão, ou seja, o momento orbital dos léptons é nulo e transições com $l = 0$ são ditas *transições permitidas*. Em certas situações, no entanto, o elemento de matriz M_{if} de (7.8b) se anula quando (7.11) se reduz somente à sua primeira parcela. Nesse caso as demais parcelas devem ser levadas em conta no cálculo de M_{if} . Sua contribuição é, como vimos, pequena, e transições onde isso ocorre são chamadas *transições proibidas*, embora elas não sejam realmente proibidas e sim menos prováveis do que as permitidas. Se apenas o primeiro termo de (7.11) anula (7.8b) temos uma proibição de 1ª ordem, se os dois primeiros anulam, uma proibição de 2ª ordem e assim por diante. Esses termos de ordem superior correspondem à soma dos momentos orbitais dos léptons igual a 1, 2, etc. Quanto maior o grau de proibição menor o valor da constante de desintegração λ por um fator $pr/\hbar \cong 10^{-4}$. Um exemplo é o decaimento ${}_{49}^{115}\text{In} \rightarrow {}_{50}^{115}\text{Sn}$ onde o primeiro termo que não se anula é o quinto termo: a constante de desintegração é muito pequena e a meia-vida desse processo é cerca de 10^{14} anos.

Para a resolução da integral (7.8b) é necessário o conhecimento da forma \mathcal{V} da interação fraca. Fermi não levou em conta em sua teoria os spins das partículas envolvidas no processo (os núcleons, o elétron e o neutrino tem, todos, spin igual a $\frac{1}{2}\hbar$) e, nesse caso, o elemento de matriz construído a partir da interação ν tem uma expressão não-relativística razoavelmente simples:

$$\mathcal{M}_{if}^F = g_F M_{if}^F \quad (7.12a)$$

com

$$|M_{if}^F|^2 = \sum_{m_f} \left| \int \Psi_f^* \left(\sum_k t_{\pm}^k \right) \Psi_i d^3r \right|^2, \quad (7.12b)$$

onde em (7.12a) se explicitou o fator g_F , a constante de acoplamento para a transição de Fermi, que é uma medida da intensidade da interação fraca para esse caso. Nesse sentido ela tem um papel equivalente à carga na interação eletromagnética. O elemento de matriz M_{if}^F é agora adimensional.

A primeira soma de (7.12b) se faz sobre os valores do número quântico magnético m do núcleo final e a segunda sobre todos os núcleons do núcleo inicial, onde atuam os operadores $t_+ = t_x + it_y$ e $t_- = t_x - it_y$, construídos a partir dos operadores de isospin definidos na seção 1.6. t_+ transforma um nêutron em um próton e deve ser usado no decaimento β^- . t_- tem o efeito oposto e é usado no decaimento β^+ . Em cálculos simples usando o modelo de camadas, a soma em k se reduz a alguns, ou mesmo a apenas 1, núcleons de valência. Em alguns desses casos o elemento de matriz M_{if} pode ser obtido facilmente e isso permite, como veremos adiante, determinar o valor da constante g_F , que se situa em torno de 10^{-4} MeV.fm³.

Prosseguindo na análise de (7.8), vejamos como escrever a densidade dN/dE_T . Para tanto, vamos inicialmente calcular λ para uma determinada energia relativística total E_e do elétron. Assim, dN passa a representar o número de estados possíveis para a energia do neutrino no intervalo entre E_ν e $E_\nu + dE_\nu$. Sendo $E_T = E_e + E_\nu$ e, com E_e fixo, $dE_T = dE_\nu$. É então possível aplicar aqui o cálculo feito para o número de estados de energia possíveis em um gás de Fermi contido em um volume V . Assim, com o emprego da fórmula (4.14)

$$dn(k) = \frac{1}{2} \frac{k^2 dk}{\pi^2} V, \quad (4.14)$$

e lembrando que para o neutrino $k = p/\hbar = E/\hbar c$, chega-se imediatamente a

$$\frac{dN}{dE_T} = \frac{dN_\nu}{dE_\nu} = \frac{V}{2\pi^2(\hbar c)^3} (E_T - E_e)^2. \quad (7.13)$$

Antes de estabelecer a forma final de (7.8), convém acrescentar um fator de correção que é normalmente introduzido para levar em conta os efeitos do campo coulombiano do núcleo sobre a função de onda do elétron, que não poderia no caso real ser representada por uma onda plana. Esse fator, dependente do número atômico Z e da energia final E_e do elétron é referido como Função de Fermi $F(Z, E_e)$. Vimos que a função de onda do elétron $\Psi_e(Z, \mathbf{r})$ é essencialmente constante no interior do núcleo. Ela pode ser substituída pelo seu valor no centro $\Psi_e(Z, 0)$ e a função de Fermi é o fator que corrige a probabilidade de encontrar o elétron no interior do núcleo, ou seja, $|\Psi(Z, 0)|^2 = F(Z, E_e)|\Psi(0, 0)|^2$ onde $\Psi(0, 0)$ é a função de onda do elétron sem a interação coulombiana. A função de Fermi tem uma aproximação não-relativística dada por

$$F(Z, E_e) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}, \quad (7.14)$$

onde $\eta = \pm Ze^2/\hbar v_e$, com o sinal positivo (negativo) válido para o elétron (pósitron). v_e é a velocidade do elétron correspondente a E_e . O cálculo relativístico de $F(Z, E_e)$ é complicado e nos limitaremos a reproduzir os resultados na figura 7.2.

Reunindo agora todos os fatores, e omitindo o índice e da energia do elétron, a expressão (7.8) assume a forma

$$\lambda(E) = \frac{F(Z, E)}{V\pi\hbar^4 c^3} |\mathcal{M}_{if}|^2 (E_T - E)^2, \quad (7.15)$$

onde fica explícito que $\lambda(E)$ se refere a uma única energia E do elétron emitido.

A partir de (7.15) pode-se obter a probabilidade por unidade de tempo de emissão de um elétron com energia entre E e $E+dE$, bastando para tanto multiplicar a taxa $\lambda(E)$

Fig. 7.2 - A função de Fermi $F(Z,E)$ plotada em função da energia cinética $T = E - mc^2$ do elétron ou pósitron [En66, reproduzida com a permissão da Addison-Wesley, Reading, Massachusetts].

pelo número de estados possíveis para o elétron no intervalo considerado. Recorrendo novamente a (4.14), desta vez para a energia do elétron, chega-se a

$$\lambda(E)dN = \frac{F(Z, E)|\mathcal{M}_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^6} E(E^2 - m^2c^4)^{1/2}(E_T - E)^2 dE, \quad (7.16)$$

onde m é a massa do elétron. (7.16) é a expressão que deve descrever o comportamento das curvas da figura 7.1. Vemos que o aspecto geral é reproduzido, com um máximo entre os valores nulos em E e na energia de desintegração E_T ; um cálculo mais detalhado exige o conhecimento do elemento de matriz \mathcal{M}_{if} . Exemplos simples serão discutidos adiante. Quando $v_e \rightarrow 0$, $F(Z, E_e) \rightarrow 2\pi\eta$ para elétrons. O fator $1/v_e$ faz com que $\lambda(E)$ seja não-nula na origem, onde $E_e \rightarrow m_e c^2 + m_e v_e^2/2$; a taxa de decaimento não é pequena para pequenas energias do elétron, já que o campo coulombiano para os elétrons é atrativo. Para pósitrons em baixas energias, $F(Z, E_e) \rightarrow 2\pi\eta e^{-2\pi\eta}$. O campo coulombiano é repulsivo para os pósitrons e podemos reconhecer a exponencial como um fator de “tunelamento” através da barreira coulombiana, que tende a suprimir a emissão de pósitrons em baixas energias.

Uma comparação mais precisa entre teoria e experiência é feita através dos *Gráficos de Kurie*. Nesses, o eixo vertical é a quantidade $\lambda(E)/[F(Z, E)E(E^2 - m^2c^4)^{1/2}]^{1/2}$ e o eixo horizontal a energia cinética do elétron. De acordo com (7.16), um decaimento permitido seria representado por uma reta, como mostra o gráfico da figura 7.3 para a desintegração do nêutron livre.

É possível ainda, em muitos casos, linearizar Gráficos de Kurie para decaimentos proibidos. Nesses casos, um fator de correção apropriado é acrescentado à escala vertical da figura 7.3; um dado grau de proibição é atribuído ao espectro quando o gráfico é linearizado pelo acréscimo do fator correspondente àquela ordem. Alguns decaimentos de primeira ordem, por exemplo, têm seus Gráficos de Kurie linearizados multiplicando-se o denominador da raiz quadrada por $(p_e^2 + p_\nu^2)$, sendo \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_ν , como em (7.10), os momentos do elétron e do neutrino. Esse valor se justifica se verificarmos que o segundo termo da expansão (7.11) é da forma $p_e + p_\nu$, contribuindo com $p_e^2 + p_\nu^2$ para $|\mathcal{M}_{if}|^2$. A contribuição do termo cruzado $\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu$ se anula quando se faz a média sobre ângulos entre elétrons e neutrinos.

Fig. 7.3 - Gráfico de Kurie para a desintegração do nêutron [Ro51].

O gráfico de Kurie também é útil para outros propósitos. Supondo que tenhamos uma transição permitida; o gráfico de Kurie é uma reta, como vimos. No entanto, na dedução da eq. (7.13) foi usada uma massa igual a zero para o neutrino. Se a massa do neutrino não for nula, o gráfico de Kurie também deve se desviar de uma reta. Esse é um dos métodos utilizados para se verificar se o neutrino possui ou não uma massa [Be72, Lu80]. Os resultados não são conclusivos mas um limite superior de 18 eV/c² para a massa do neutrino pôde ser estabelecida [Ku86].

7.4 - A Constante de Desintegração - O $\log ft$

Vamos agora, a partir da equação (7.16), obter o valor da constante de desintegração λ . A integral de (7.16) é

$$\lambda = \frac{m^5 g^2 c^4 |\mathcal{M}_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_T), \quad (7.17a)$$

onde a função

$$f(Z, E_T) = \frac{1}{m^5 c^{10}} \int_0^{E_T} F(Z, E) E (E^2 - m^2 c^4)^{1/2} (E_T - E)^2 dE, \quad (7.17b)$$

conhecida como *Integral de Fermi*, é adimensional e usualmente apresentada em curvas que são função do número atômico Z e da energia máxima do elétron E_T . Um conjunto dessas curvas é mostrado na figura 7.4.

Fig. 7.4 - Curvas representativas da Integral de Fermi, eq. (7.17b). A sequência de curvas é para $Z = 90, 60, 30$ e 0 para o decaimento- β^+ , e continua para $Z = 30, 60$ e 90 para o decaimento- β^- [FT50].

A equação (7.17a) permite que se examine a influência do elemento de matriz \mathcal{M}_{if} no cálculo da constante de desintegração λ . Usando a relação (5.4) entre λ e a meia-vida $t_{1/2}$, (7.17a) se reescreve

$$ft_{1/2} = \frac{1,386\pi^3 \hbar^7}{g^2 m^5 c^4 |\mathcal{M}_{if}|^2}. \quad (7.18)$$

Vemos que o produto $ft_{1/2}$ ou, simplesmente, ft , depende exclusivamente de \mathcal{M}_{if} : quanto maior o valor do elemento de matriz mais provável é a ocorrência da transição.

Em certos casos especiais o elemento de matriz \mathcal{M}_{if} é calculado facilmente. É o que acontece, por exemplo, na transição β^+ do ^{14}O para o ^{14}N [ver problema 7.13)]. É uma transição $0^+ \rightarrow 0^+$ de $M_{if} = \sqrt{2}$, onde meia-vida medida dá um valor para ft próximo de 500 min. Isso permite usar (7.18) para determinar a constante de acoplamento, no que resulta o valor $g_F \cong 10^{-4} \text{ MeV}\cdot\text{fm}^3$, mencionado na seção anterior. Transições em que o valor de M_{if} é próximo da unidade produzem os mais baixos valores de $\log ft$ e são chamadas de *superpermitidas*.

Transições proibidas podem ter valores de ft várias ordens de grandeza maiores do que as permitidas. Isso se deve à natural dificuldade de ser criado um par elétron-neutrino com $l > 0$. Um pequeno cálculo clássico indica isso: imagine um decaimento- β com $Q = 1 \text{ MeV}$. Na hipótese de um elétron sair com a energia total ele teria, próximo à superfície do núcleo, um momento angular máximo $m_e v R \cong 0,05\hbar$, para o caso de um núcleo pesado de $R = 7,4 \text{ fm}$. Isso mostra como o valor $l = 1$ é improvável e muito mais ainda os valores de l maiores. Desse fato resulta uma faixa muito extensa de valores de ft e é comum, por isso, se usar o $\log_{10} ft$, com t dado em segundos, como medida da probabilidade de decaimento de um dado estado por emissão β . Uma distribuição experimental de valores de $\log ft$ é vista na figura 7.5.

O $\log ft$ permite, a grosso modo, separar as diversas transições pelo seu grau de proibição, já que cada grau de proibição ocupa uma certa faixa de valores do $\log ft$. Entretanto, essa separação não é perfeita, já que, como vemos na figura 7.5, as diversas faixas se interceptam. Outro fato digno de observação é a escassez de dados sobre transições com $l \geq 2$. Para $l = 4$ apenas dois casos são conhecidos, ambos com $\log ft$ próximo de 23.

7.5 - Transições de Gamow-Teller

Quando um decaimento- β leva um núcleo inicial de spin I_i a um núcleo final de spin I_f , as conservações de momento angular e paridade^(*) criam certas regras de seleção para I_i , I_f e as paridades dos estados inicial e final. Para estabelecer essas regras é necessário inicialmente distinguir duas situações possíveis: na primeira, o elétron e o neutrino tem spins opostos e não contribuem para o balanço de momento angular. Transições em que isso ocorre são chamadas de *transições de Fermi*, e para essas é fácil ver que

$$I_i = I_f + l \quad (\text{Fermi}), \quad (7.19)$$

onde l é o momento angular orbital carregado pelo elétron e o neutrino. Nas *transições de Gamow-Teller* por sua vez, os spins dos léptons são paralelos e contribuem com uma unidade para o balanço de momentos:

$$I_i = I_f + l + 1 \quad (\text{Gamow-Teller}). \quad (7.20)$$

(*) A função de onda nuclear tem, na verdade, uma contribuição da força fraca, que não conserva paridade (ver seção 7.6), mas essa contribuição é muito pequena.

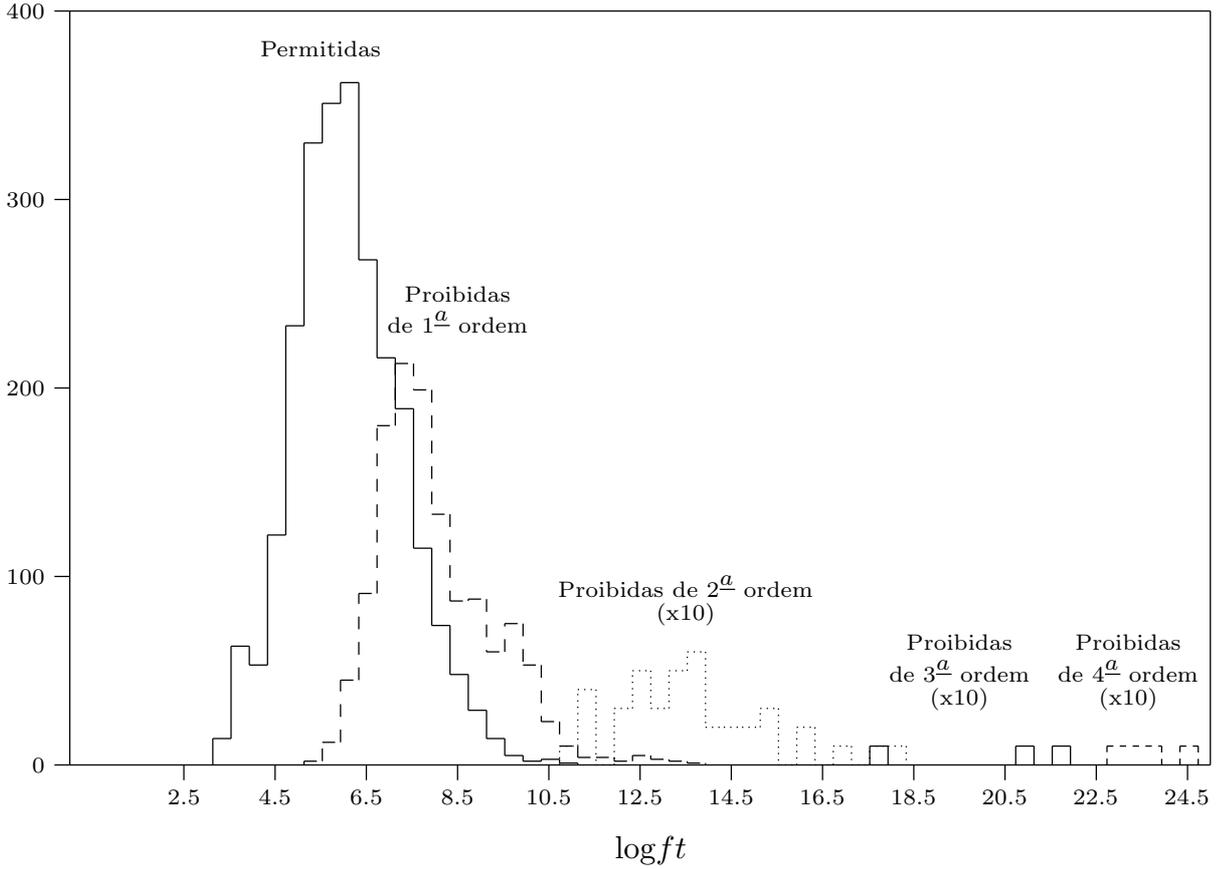


Fig. 7.5 - Distribuição experimental de valores de $\log ft$. O número de casos da ordenada inclui o processo de captura eletrônica (ver seção 7.9).

As transições de Gamow-Teller não são abrangidas pela teoria de Fermi que, como vimos, ignora os spins das partículas. Pode-se mostrar que com a introdução do spin o elemento de matriz (7.12b) é modificado pela presença adicional das três componentes do operador de spin de Pauli:

$$|M_{if}^{GT}|^2 = \sum_{m_f} \sum_x \left| \int \Psi_f^* \left(\sum_k t_{\pm}^k \sigma_x^k \right) \Psi_i d^3r \right|^2, \quad (7.21)$$

onde \sum_x representa a soma sobre as matrizes de Pauli (2.45), σ_x , σ_y e σ_z . O índice k significa novamente que os operadores t e σ atuam sobre o núcleon k do núcleo inicial, cuja função de onda é Ψ_i . Havendo a possibilidade de transição de Fermi e de Gamow-Teller, deve-se escrever (7.12a) de forma completa: $|\mathcal{M}_{if}|^2 = g_F^2 |M_{if}^F|^2 + g_{GT}^2 |M_{if}^{GT}|^2$.

7.6 - Regras de Seleção

A partir das regras (7.19) e (7.20) pode-se estabelecer a variação do spin do núcleo emissor para os diversos valores de l . Assim, em decaimentos permitidos ($l = 0$) do tipo

Fermi, $\Delta I = |I_i - I_f| = 0$. Nas transições de Gamow-Teller, ΔI , pela composição de momento angular, pode assumir os valores 0 e 1, exceto se $I_i = 0$ e $I_f = 0$. Para esse caso, só a transição de Fermi é possível. Um exemplo é o decaimento $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$, onde o nível 0^+ do oxigênio decai em um estado excitado 0^+ do nitrogênio. Exemplos de decaimento permitido em que só as transições de Gamow-Teller são possíveis envolvem variação do spin nuclear, como no caso $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}$, onde o estado inicial 5^+ do Co decai em um estado 4^+ do Ni.

No caso mais geral, ambas as equações, (7.19) e (7.20), podem ser satisfeitas e o decaimento se dá por uma mistura de transições de Fermi e de Gamow-Teller. Exemplo típico é o decaimento do nêutron livre, onde um estado $\frac{1}{2}^+$ decai em outro estado $\frac{1}{2}^+$ do próton: 18% das transições são de Fermi e 82% de Gamow-Teller.

A conservação de paridade tem também efeitos bastante claros: sendo a paridade da parte orbital dada por $(-1)^l$, as transições permitidas e as proibidas de grau par não acarretam mudança na paridade, ao contrário das proibidas de grau ímpar, onde a paridade do núcleo filho é oposta à do núcleo inicial. A tabela 7.1 resume as regras de seleção para o decaimento- β .

Transição	$\Delta I = I_i - I_f$	Mudança de paridade
Permitida	$0, \pm 1$	não
Proibida de primeira ordem	$0, \pm 1, \pm 2$	Sim
Proibida de segunda ordem	$\pm 2, \pm 3$	Não
.....
Proibida de ordem n	$\pm n, \pm(n + 1)$	$(-1)^n$ [1=sim, -1=não]

Tab. 7.1 - Regras de seleção para momento angular e paridade no decaimento- β .

Sendo as transições de menor l as mais importantes, uma informação útil seria também mostrar os menores valores de l possíveis para cada variação ΔI entre os estados inicial e final. A tabela 7.2 mostra esses valores para as transições de Fermi e Gamow-Teller.

A existência de regras de seleção permite, em muitos casos que desintegrações com um alto grau de proibição se tornem detectáveis pela ausência das desintegrações de grau inferior. Exemplo é o decaimento, com proibição de segundo grau, $3^+ \rightarrow 0^+$ do ^{22}Na para o ^{22}Ne , impossível de ocorrer com $l < 2$. Esse exemplo não é diferente em essência do exemplo do ^{115}In citado após a equação (7.11). De fato, uma transição que viola as regras de seleção da tabela 7.1 tem seu correspondente elemento de matriz (7.12) igual a zero. Um exemplo dos mais simples é imaginar uma transição de Fermi permitida e com mudança de paridade. Pela tabela 7.1 essa transição não é possível. Com efeito, examinando o elemento de matriz (7.12) vemos que ele é nulo por se tratar da integração do produto de duas funções de paridades diferentes.

$ \Delta I $	0		1		2		3		4		5	
$\Delta\pi$	sim	não										
Fermi	1*	0	1	2*	3*	2	3	4*	5*	4	5	6*
G-T	1	0*	1	0	1	2	3	2	3	4	5	4

Tab. 7.2 - Menor valor possível de l para cada variação $|\Delta I|$ do spin nuclear e $\Delta\pi$ da paridade. O asterisco indica quando a variação não é possível se $I_i = 0$ ou $I_f = 0$. Valores de l maiores do que 4 nunca foram observados.

Além das regras de seleção para o spin, o decaimento- β tem também regras de seleção para o isospin. É fácil ver por (7.12), por exemplo, que estados de diferentes valores do isospin T não podem ser conectados por uma transição de Fermi, já que a atuação do operador $\sum t_{\pm} = T_{\pm}$ [ver equação (4.65)] se restringe a mudar a componente 3 de T de 1 unidade, e núcleos com $T_i \neq T_f$ vão ter a matriz $M_{if} = 0$. Se a transição é $0^+ \rightarrow 0^+$, caso em que $M_{if}^{GT} = 0$, a meia-vida associada deve ser muito alta. De fato, são listadas em [Si98] cerca de 20 transições $0^+ \rightarrow 0^+$ ($\Delta T \neq 0$), onde o $\log ft$ varia de 6,5 a 10,5, caracterizando uma proibição ditada pela regra de seleção de isospin.

7.7 - Não-Conservação de Paridade no Decaimento Beta

As simetrias desempenham um papel essencial na física. Princípios fundamentais como os da conservação da energia e momento estão ligados às simetrias do espaço e do tempo. A homogeneidade do espaço leva à conservação do momento linear, e a inexistência de direções privilegiadas (isotropia do espaço) resulta na constância do momento angular de um sistema isolado. A conservação da energia é consequência da homogeneidade do tempo, isto é, o fato de não haver instantes especiais para marcação da origem dos tempos. Os exemplos acima não são únicos e a matemática alemã Emmy Noether pôde estabelecer que a cada simetria que ocorre na natureza está associado um princípio de conservação.

A descrição de um fenômeno através de um sistema de eixos $x - y - z$ não deveria, em princípio, depender da orientação dos eixos. Em particular, nenhuma propriedade deveria depender do fato de o sistema ser direto ou inverso (veja figura 7.6). A essa simetria do espaço está associado um princípio de conservação, o da paridade da função de onda que descreve o sistema. A conservação da paridade foi estabelecida no capítulo 2 e aplicada às reações envolvendo bárions e mésons.

Existe uma outra forma com que a simetria descrita acima se apresenta: se um determinado evento físico é descrito por coordenadas espaciais $\mathbf{r}(t)$, as coordenadas $-\mathbf{r}(t)$ devem descrever um evento que obedece às mesmas leis físicas. Tomemos como

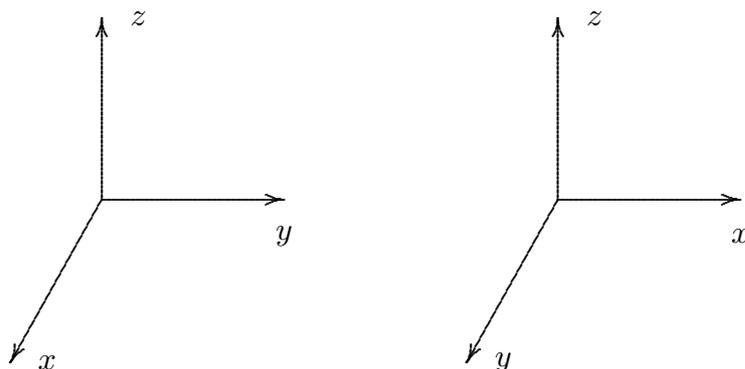


Fig. 7.6 - Sistemas direto (a) e inverso (b) empregados na descrição de uma situação física. Note que um sistema não pode ser obtido do outro por uma rotação espacial.

exemplo o caso particular da reflexão em um espelho plano, que corresponde à troca de sinal de apenas uma coordenada. O que a conservação de paridade impõe é que a visão do mundo através do espelho não pode ser distinguida da visão do mundo real pela análise das leis físicas de cada mundo, ou seja, o mundo visto através do espelho deveria obedecer às mesmas leis físicas do mundo real.

Esse esquema lógico parecia ser de validade universal mas os meados da década de 50 trouxeram acontecimentos surpreendentes. O ponto de partida foi o comportamento de duas partículas, conhecidas então como θ e τ . Essas partículas tinham a mesma massa e o mesmo spin nulo mas paridades intrínsecas diferentes pois decaíam, entre outros, pelos modos

$$\theta \longrightarrow \pi^+ + \pi^0, \quad (7.22)$$

$$\tau \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad (7.23)$$

implicando na atribuição de paridade positiva para θ e negativa para τ , já que os píons têm paridade negativa e os eventuais momentos angulares orbitais têm contribuição total nula para a paridade (veja exercício 7.15).

A existência de partículas de características idênticas que diferiam apenas na paridade era algo novo e intrigante e ficou conhecido como o “enigma $\theta - \tau$ ”. Esse enigma foi resolvido por dois físicos chineses, T. D. Lee e C. N. Yang [LY56] que, em 1956, admitiram serem θ e τ na verdade uma só partícula, hoje conhecida como méson-K. Para explicar como o méson-K pode decair pelos dois modos (7.22) e (7.23), Lee e Yang propuseram a revolucionária idéia de que na interação fraca, que rege os decaimentos, a paridade não é necessariamente conservada, como ocorre nas interações forte, eletromagnética e gravitacional. Assim, o decaimento- β ficaria incluído nas reações que não

conservam paridade, e Lee e Yang idealizaram algumas experiências onde isso poderia ser verificado.

Uma dessas experiências realizada por C. S. Wu e colaboradores [Wu57] em 1957. Núcleos de ^{60}Co tiveram seus spins (momento angular total) alinhados pela ação de um campo magnético atuando em uma amostra mantida a uma temperatura muito baixa, necessária para evitar a ação destrutiva da agitação térmica sobre o alinhamento.

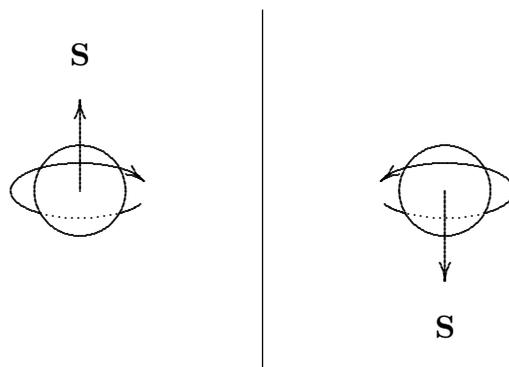


Fig. 7.7 - Um núcleo e sua imagem em um espelho têm spins opostos.

O ^{60}Co é um β -emissor. O que se espera da distribuição angular dos elétrons emitidos? Em particular, pode haver alguma preferência pela emissão dos elétrons no sentido do spin do núcleo ou em sentido oposto? Examinemos a figura 7.7: o spin de um núcleo é representado à esquerda, juntamente com o movimento de uma partícula que simbolicamente cria esse spin. A projeção do conjunto é vista no espelho à direita e é fácil verificar que o movimento da partícula se inverte e o spin da projeção deve ter sentido inverso ao original. Nesse contexto, o que aconteceria se os elétrons de uma desintegração- β tivessem maior preferência, digamos, por serem emitidos no sentido do spin do que no sentido oposto? A imagem que teríamos no espelho seria justamente a oposta, os elétrons sendo emitidos no sentido contrário ao spin. Se a conservação de paridade fosse uma exigência para o processo, não poderíamos ter uma física para o mundo real e outra para o projetado. Assim, a detecção dessa assimetria na emissão- β indicaria que a paridade não se conserva nesse processo.

Os resultados obtidos por Wu e colaboradores mostraram que existe efetivamente essa assimetria, os elétrons do decaimento- β do ^{60}Co sendo emitidos preferencialmente em sentido oposto ao spin. A figura 7.8 mostra a forma dessa distribuição angular, obtida em uma experiência aperfeiçoada feita 25 anos após a original.

Outros experimentos de caráter diferente (L. M. Lederman e colaboradores [Le57], por exemplo, analisaram o decaimento do méson π e do múon subsequente) vieram

Fig. 7.8 - Forma da distribuição angular dos elétrons emitidos na desintegração $-\beta$ do ^{60}Co . O ângulo θ° indica o sentido da polarização e o raio vetor I é proporcional ao número de elétrons emitidos naquela direção. As cruces assinalam os valores experimentais obtidos de [Ch80].

reafirmar a não-conservação de paridade pela interação fraca, confirmando as previsões de Lee e Yang.

A observação do efeito desse aspecto peculiar da interação nas propriedades das partículas emergentes pode ser feita através da grandeza denominada *helicidade*. A helicidade

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}|} \quad (7.24)$$

é definida a partir da projeção do spin \mathbf{s} sobre o momento da partícula \mathbf{p} . Seu valor depende, em princípio, do observador, pois se um referencial vê o vetor \mathbf{p} em um dado sentido, outro referencial pode vê-lo em sentido oposto (basta passar a um referencial com velocidade maior e mesma direção que o movimento da partícula). Isso não acontece, entretanto, com partículas que viajam à velocidade da luz, como os fótons e, supostamente, os neutrinos. Para eles, a helicidade é uma quantidade bem definida, independente do observador e aí reside o fato surpreendente: enquanto os fótons podem ter helicidade $+1$ ou -1 (luz circularmente polarizada à direita ou à esquerda),

os neutrinos têm sempre $h = -1$ e os antineutrinos $h = 1$ (*). Um neutrino diante de um espelho revela uma imagem que não corresponde a uma situação física existente, um neutrino com helicidade $+1$. (figura 7.9). Situação semelhante mas com números trocados ocorre com o antineutrino.

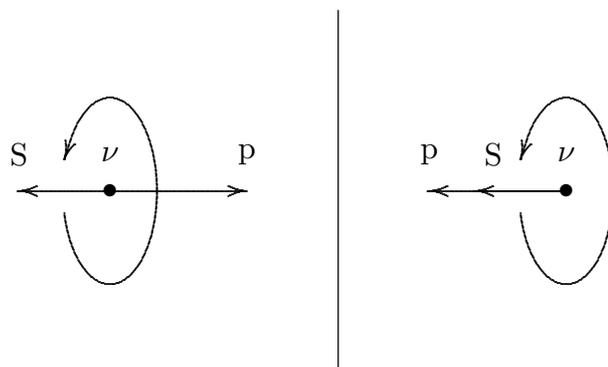


Fig. 7.9 - Um neutrino (à esquerda) com helicidade -1 , tem como imagem um neutrino com helicidade $+1$ (à direita), partícula que não existe na natureza.

No decaimento- β os elétrons também são polarizados, mas a massa diferente de zero faz com que essa polarização não seja completa. A helicidade não é, como no caso dos neutrinos, um bom número quântico, mas o resultado global é que a fração de elétrons emitida com helicidade positiva menos a fração emitida com helicidade negativa é igual a $-v/c$, onde v é a velocidade dos elétrons. Para os pósitrons esse valor é $+v/c$.

A conexão da helicidade do neutrino com a não-conservação de paridade do decaimento- β do ^{60}Co pode ser explicada do seguinte modo: essa transição leva um estado $5+$ do cobalto a um estado $4+$ do ^{60}Ni e é do tipo Gamow-Teller. A tabela 7.1 mostra que a transição deve se dar com $l = 0$. Os núcleos estão polarizados, tendo a maior parte deles o valor máximo da projeção do spin, $M = +5$. Para conservar momento angular, os spins dos léptons devem estar alinhados com o spin do núcleo e, para o antineutrino emitido, isso significa ser esse o seu sentido de emissão. Acontece que para esse tipo de transição existe uma correlação angular entre as direções de emissão do antineutrino e do elétron, isto é, existe uma função que relaciona os ângulos de emergência do elétron e do antineutrino e essa função indica que as duas partículas saem preferencialmente em sentidos opostos. Isso faz com que a saída do elétron em sentido contrário ao spin seja preponderante.

(*) Quando observados em um sistema direto de eixos. Para um sistema inverso, $h = 1$ para os neutrinos e $h = -1$ para os antineutrinos.

Ao se analisar o comportamento de outras simetrias nas experiências que descrevemos, constata-se que não somente a paridade apresenta resultados inesperados. Da mesma maneira se comporta a operação de conjugação de carga, isto é, a operação de troca das partículas por suas respectivas antipartículas e vice-versa. Essa operação, designada normalmente por C, quando aplicada a determinado processo, conduz geralmente a outro processo possível de ocorrer na natureza. Tal não é o caso, no entanto, para o fenômeno que viemos examinando. Tomemos o exemplo do neutrino. A operação C, de conjugação de carga, transforma o neutrino, de helicidade -1 em um antineutrino com a mesma helicidade, partícula essa que não existe. Nesse sentido, tanto a operação C quanto a operação de troca de paridade, P, produzem resultados do mesmo tipo.

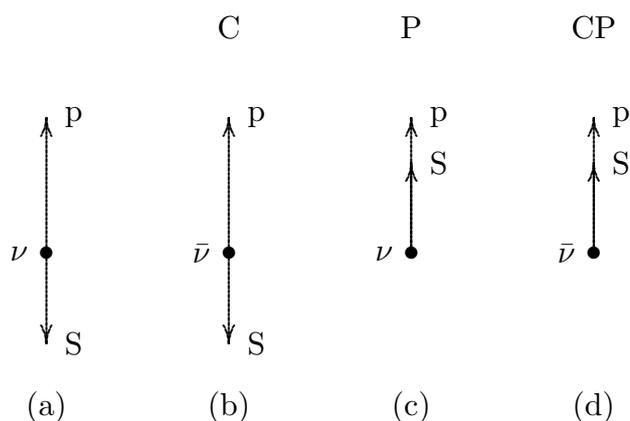


Fig. 7.10 - O diagrama (a) mostra um neutrino com sua projeção do spin oposto à direção do movimento ($h = -1$). Em (b), após a aplicação do operador C, resulta uma partícula inexistente, um antineutrino com $h = -1$. Da mesma forma, não existe a partícula mostrada em (c), um neutrino com $h = 1$, após a aplicação do operador P em (a). A aplicação sucessiva dos dois operadores, CP, no entanto, conduz à partícula do diagrama (d), um antineutrino de helicidade correta $h = 1$.

A figura 7.10 exemplifica bem a situação. As operações C e P aplicadas isoladamente ao neutrino não produzem partículas reais. A aplicação do produto CP, no entanto, restaura a realidade. Mostra-se que esse resultado não é restrito a esse exemplo mas válido também para os demais casos que analisamos anteriormente. Dessa forma, passou-se a acreditar que todas as leis da Física eram invariantes em relação a uma operação CP, já que fenômenos regidos pelas forças forte, eletromagnética e gravitacional são sabidamente invariantes pelas operações C e P isoladamente.

A crença na invariância universal de todos os processos pela operação CP teve que ser revista quando, em 1964, Cronin e Fitch [Ch64], analisando o decaimento dos mésons K^0 e \bar{K}^0 , puderam constatar uma pequena (0,3%) contribuição de eventos que não

obedecem àquela expectativa. A violação-CP do méson-K, como é comumente referida, colocou novos e difíceis problemas que não tem encontrado explanação satisfatória até o momento.

7.8 - Duplo Decaimento Beta

Um caso especial de decaimento- β pode ocorrer quando o isóbaros vizinho não é acessível ao decaimento mas o isóbaros seguinte a esse não apresenta impedimento para a transição. Nesse caso a transição poderia ser efetuada com a emissão de dois elétrons simultaneamente.

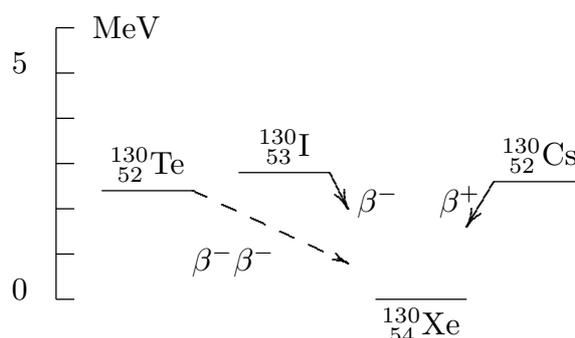


Fig. 7.11 - Diagramas de energia do estado fundamental dos isóbaros de $A = 130$.

Verifiquemos o exemplo da figura 7.11. A cadeia de isóbaros de $A = 130$ apresenta a distribuição de energia característica esboçada na figura 5.2b. O núcleo $^{130}_{52}\text{Te}$ não pode decair por β^- para o $^{130}_{53}\text{I}$, situado a uma energia superior, mas poderia chegar ao $^{130}_{54}\text{Xe}$ pela emissão de 2 elétrons. Possibilidades como essa ocorrem em muitas outras cadeias de isóbaros; o fenômeno não é de fácil detecção pois as meias-vidas para a emissão de 2 elétrons simultaneamente são muito altas, próximas ou superiores a 10^{19} anos, exigindo técnicas experimentais muito especiais. Dois métodos são empregados, a contagem direta de eventos e a análise de rochas antigas que contém o material beta emissor duplo e que deveriam também conter quantidades correlatas do núcleo produto. A tabela 7.3 mostra os poucos resultados confirmados até o momento. A forte motivação para detectar o fenômeno é devida, principalmente, à possibilidade de se constatar a existência de duplo decaimento- β sem o acompanhamento de neutrinos. Essa possibilidade está ligada à questão de a massa do neutrino ser ou não nula. Se a massa do neutrino não é nula, a helicidade não é um bom número quântico e o neutrino e antineutrino carregam uma pequena componente da helicidade “errada”, ou seja, o neutrino é um pouco antineutrino e vice-versa, já que a helicidade é a única grandeza que distingue as duas partículas. Se for esse o caso, o neutrino resultante do decaimento

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (7.25)$$

Isótopo	$T_{1/2}$ (anos)	Método
^{76}Ge	$(14, 2 \pm 0, 3 \pm 1, 3) \times 10^{20}$	d
^{82}Se	$(1, 08^{+0,26}_{-0,06}) \times 10^{20}$	d
^{96}Zr	$(3, 9 \pm 0, 9) \times 10^{19}$	g
^{100}Mo	$(6, 82^{+0,38}_{-0,53} \pm 0, 68) \times 10^{18}$	d
^{116}Cd	$(3, 75 \pm 0, 35 \pm 0, 21) \times 10^{19}$	d
^{128}Te	$(2, 2 \pm 0, 3) \times 10^{24}$	g
^{130}Te	$(7, 9 \pm 1, 0) \times 10^{20}$	g
^{150}Ne	$(6, 75^{+0,37}_{-0,42} \pm 0, 68) \times 10^{18}$	d
^{238}U	$(2, 0 \pm 0, 6) \times 10^{21}$	g

Tab. 7.3 - Meias-vidas para o duplo decaimento- β [MV94], [Ta96], [Ar96], [Si97]. Nos valores com dupla indicação de erro, o primeiro se refere ao erro verdadeiro, o segundo ao erro sistemático. Na terceira coluna, d e g se referem a métodos de contagem direta e geoquímicos, respectivamente [MV94].

poderia induzir a reação

$$\nu + n \rightarrow p + e^-, \quad (7.26)$$

cujo resultado global é o duplo-decaimento- β

$$2n \rightarrow 2p + 2e^- \quad (7.27)$$

sem a emissão de neutrinos. A ocorrência de (7.27) pelas duas etapas distintas (7.25) e (7.26) é extremamente improvável e em alguns casos (veja exemplo anterior do $^{130}_{52}\text{Te}$) energeticamente impossível. Para esses casos podemos admitir a ocorrência virtual do processo, realizado em um intervalo de tempo compatível com o Princípio de Incerteza $\Delta E \Delta T \sim \hbar$. O neutrino existiria num tempo Δt muito curto, característico da interação fraca e sua energia poderia chegar a várias dezenas de MeV. Isso abriria um volume

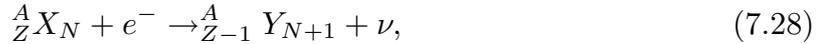
grande no espaço de fases e tornaria o processo (7.27) várias ordens de grandeza mais provável.

Métodos experimentais de verificação do fenômeno tentam aproveitar o fato de que os elétrons são emitidos simultaneamente e devem ter energia total igual ao Q da reação. A existência do processo de decaimento- β duplo sem a emissão de neutrinos seria revelada pela presença de um pico bem localizado na distribuição de energia cinética dos elétrons emitidos. Isso não aconteceria, no entanto, para outro tipo de decaimento admitido: o duplo decaimento- β sem a emissão de neutrinos mas com a emissão de uma partícula hipotética, um bóson neutro leve, o *majoron*. Sabemos que elétrons e neutrinos são léptons (número leptônico +1), pósitrons e antineutrinos são antiléptons (número leptônico -1). Essa terceira forma de duplo decaimento- β viria atender à conservação do número leptônico, que é violado em (7.27).

A distinção entre esses dois últimos processos é apenas formal. Nenhuma experiência mostrou, até agora, qualquer indício positivo da existência de duplo decaimento- β sem a presença de neutrinos, tendo sido estabelecidos, apenas, limites inferiores para as meias-vidas em alguns núcleos.

7.9 - Captura Eletrônica

Os elétrons que circundam o núcleo são descritos por funções de onda que têm certa extensão espacial. Os que se localizam na camada K, em particular, têm probabilidade razoável de serem encontrados no interior do núcleo e dar ensejo a uma reação de captura



competindo com o decaimento- β^+ , que produz o mesmo núcleo final. O valor do Q da reação

$$Q_\epsilon = (M_{Z,A} - M_{Z-1,A})c^2 - B_K, \quad (7.29)$$

onde o símbolo ϵ é usado para simbolizar a captura, leva em consideração a perda da energia de ligação B_K do elétron que estava situado na camada K. Em unidades de mc^2 , essa energia de ligação tem, na aproximação não-relativística, o valor

$$B_K = \frac{1}{2} \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right) \quad (\text{em unidades de } mc^2). \quad (7.30)$$

O processo (7.28) tem, por um lado, características mais simples do que a emissão β^+ , pois não havendo pósitron emitido, os neutrinos são monoenergéticos, com uma energia muito próxima do valor Q_ϵ . Por outro lado, os neutrinos são de difícil detecção e o processo de captura eletrônica é normalmente estudado pela medição dos raios-X que resultam da ocupação da vaga do elétron capturado por outro elétron das camadas superiores. Quanto à energética do processo, é de se ressaltar que a captura eletrônica,

não envolvendo o dispêndio de energia da criação de um pósitron, pode ocorrer em situações onde a emissão- β^+ é energeticamente proibida.

A constante de desintegração λ pode ser calculada de uma forma simples. Inicialmente, devemos partir do fato de que no caso da captura eletrônica só existe a emissão do neutrino, e a expressão (7.13) é a medida da densidade de estados finais do neutrino

$$\frac{dN_\nu}{dE_T} = \frac{VE_T^2}{2\pi^2(\hbar c)^3}. \quad (7.31)$$

No presente caso, usaremos para o valor da função de onda do elétron Ψ_e que aparece em (7.9), o valor na origem da função de onda Ψ_K do elétron na órbita K,

$$\Psi_e = \Psi_K(0), \quad (7.32)$$

de modo que (7.8) se escreve agora

$$\lambda = 2\frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}^2| |\Psi_K(0)|^2, \quad (7.33)$$

onde o primeiro fator 2 se deve a que existem dois elétrons na órbita K. O valor de Ψ_K na origem é dado aproximadamente por

$$\Psi_K(0) = \pi^{-1/2} \left(\frac{Zme^2}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (7.34)$$

e assim obtemos o valor para a constante de desintegração por captura eletrônica na órbita K:

$$\lambda_K = \frac{2Z^3 m^3 e^6 |\mathcal{M}_{if}|^2 E_T^2}{\pi^2 \hbar^{10} c^3}. \quad (7.35)$$

O elemento de matriz nuclear $|\mathcal{M}_{if}|$ conecta as mesmas funções de onda inicial e final no caso da captura eletrônica e do decaimento- β^+ . Dessa maneira, ele se cancela quando, utilizando-se (7.35) e (7.17) se forma a razão

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_{\beta^+}} = \frac{4\pi Z^3 e^6 E_T^2}{m^2 \hbar^3 c^7 f(Z, E_T)} \quad (7.36)$$

entre as probabilidades de captura eletrônica e emissão- β^+ . Quando da aplicação de (7.36), note que $E_T = Q_\epsilon + mc^2$. As curvas $\lambda_K/\lambda_{\beta^+}$ são mostradas em função de E_T na figura 7.12, onde se usam resultados relativísticos mais precisos. Uma das características dessas funções é que o processo de captura eletrônica aumenta sua probabilidade relativa

Fig. 7.12 - Razão entre as probabilidades de captura-K e emissão- β^+ em função da energia total disponível [FT50].

para núcleos mais pesados. Para esses, inclusive, a captura na órbita L começa também a dar uma contribuição significativa, podendo chegar a 15% dos eventos de captura-K.

Sugestões para Leitura

- A violação da paridade é descrita em M. Gardner, “The Ambidextrous Universe”, Scribner, New York, 1979, e no artigo de M. A. Bouchiat e L. Pottier, “An Atomic Preference between left and right”, *Scientific American* **250**, junho de 1984, pag. 76.
- H. Georgi e S. Glashow, “Unified Theory of Elementary Particles”, *Phys. Today*, setembro de 1980, pag. 30.
- E. J. Konopinski, “The Theory of Beta Decay”, Oxford University Press, Oxford, 1966.
- G. M. Lewis, “Neutrinos”, Wykeham, London, 1970.
- L. M. Lederman, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 129.
- M. Morita, “Beta Decay and Muon Capture”, Benjamin, Reading, MA, 1973.
- Michael K. Moore e Simon P. Rosen, “The Double Beta Decay”, *Scientific American*, novembro de 1989, pag. 30.
- H. F. Schopper, “Weak Interactions and Nuclear Beta Decay”, North-Holland, Amsterdam, 1966.
- C. Strachan, “The Theory of Beta Decay”, Pergamon, Oxford, 1969 - contém reprodução dos artigos originais de Fermi, Gamow e Teller, Lee e Yang e outros.
- C. S. Wu e S. A. Moszkowsky, “Beta Decay”, Wiley-Interscience, New York, 1966.

Exercícios

- 1 - A partir das massas dos bósons vetoriais intermediários (7.1) e (7.2) faça, utilizando o Princípio da Incerteza, uma estimativa do alcance das forças de interação fraca.
- 2 - Como o isótopo estável do sódio é o ^{23}Na , que tipo de radioatividade você esperaria do (a) ^{22}Na e (b) ^{24}Na ?
- 3 - O ^{150}Eu pode decair por β^- , β^+ e ϵ (captura eletrônica). Determine os valores de Q para os três modos de decaimento.
- 4 - O ^{75}Ge decai por β^- no ^{75}As . Usando uma tabela de massas, determine a energia máxima dos elétrons emitidos.
- 5 - O decaimento β^- do ^{66}Cu ocorre, em 80% dos casos, para um nível excitado do ^{66}Zn , sendo emitidos elétrons de energia máxima 1,6 MeV. Determine a energia de excitação desse estado do zinco.
- 6 - Considere os decaimentos- β permitidos que tenham uma energia de desintegração E_T grande comparada a $m_e c^2$ (o decaimento do ^8B , por exemplo). Em tais decaimentos, os efeitos de correção de Coulomb e das massas dos léptons são pequenos. Mostre que, desprezando-se estes efeitos
 - (a) a energia média do elétron é $E_T/2$,
 - (b) a vida média depende de E_T como E_T^{-5} .Mostre, por outro lado, que se $E_T \ll m_e c^2$, a energia média vale $E_T/3$.
- 7 - Obtenha uma expressão para a distribuição de momentos dos elétrons no decaimento- β para uma massa do neutrino $m_\nu \neq 0$.
- 8 - Obtenha uma expressão para a distribuição de energia dos elétrons supondo que dois neutrinos (massa zero) sejam emitidos no processo de decaimento- β .
- 9 - Mostre que o espectro de energia do decaimento- β permitido chega na energia máxima com tangente horizontal se $m_\nu = 0$ e com tangente vertical se $m_\nu \neq 0$.
- 10 - Classifique os seguintes decaimentos de acordo com o grau de proibição:
 - a) $^{15}\text{O}(\frac{1}{2}^-) \rightarrow ^{15}\text{N}(\frac{1}{2}^-)$
 - b) $^{69}\text{Zn}(\frac{1}{2}^-) \rightarrow ^{69}\text{Ga}(\frac{3}{2}^-)$
 - c) $^{87}\text{Rb}(\frac{3}{2}^-) \rightarrow ^{87}\text{Sr}(\frac{9}{2}^+)$
 - d) $^{99}\text{Tc}(\frac{9}{2}^+) \rightarrow ^{99}\text{Ru}(\frac{5}{2}^+)$
 - e) $^{115}\text{In}(\frac{9}{2}^+) \rightarrow ^{115}\text{Sn}(\frac{1}{2}^+)$
 - f) $^{141}\text{Ce}(\frac{7}{2}^-) \rightarrow ^{141}\text{Pr}(\frac{5}{2}^+)$
- 11 - a) Traçar o Gráfico de Kurie para as desintegrações β^+ e β^- do estado fundamental 1^+ do $^{64}_{29}\text{Cu}$ a partir de pontos extraídos da figura 7.1 e do emprego da figura 7.2. Dizer pelo seus aspectos se se tratam de transições permitidas ou proibidas.
 - b) Obtenha a partir da tabela 7.1 o valor do momento angular orbital l dos elétrons emitidos em cada caso. Os resultados são coerentes com os obtidos em (a)?
 - c) Como se obtêm, para cada caso, as distribuições de momentos lineares dos elétrons e dos pósitrons?

12 - O estado fundamental 0^+ do ^{50}Mn decai por β^+ no estado fundamental de mesmo spin e paridade do ^{50}Cr , com uma meia-vida de 0,286 s. a) É essa uma transição de Fermi ou de Gamow-Teller? b) Use uma tabela de massas e o gráfico da figura 7.4 para determinar o valor do $\log ft$ para essa transição. c) O resultado é compatível com as informações da tabela 7.1 e da figura 7.5?

13 - Mostre que, no decaimento β^+ do ^{14}O para o ^{14}N , o modelo de camadas fornece um valor para o elemento de matriz de transição de Fermi (7.12) igual a $\sqrt{2}$. Sugestão: trate ambos os núcleos como sistemas de duas partículas.

14 - Mostre que o decaimento- β entre núcleos-espelho (o número de prótons de um é o número de nêutrons do outro e vice-versa) de mesmo spin J têm os elementos de matriz de transição dados por:

$M_{ij}^2 = 1$	Fermi	
$M_{ij}^2 = (j + 1)/j$	Gamow-Teller	$j = l + 1/2$
$M_{ij}^2 = j/(j + 1)$	Gamow-Teller	$j = l - 1/2$

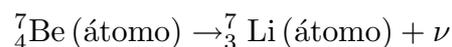
Sugestão: Observe que, no decaimento- β^\pm , $\Psi_i = T_\pm \Psi_f$ e use as regras de comutação entre os operadores de isospin, idênticas às dos operadores de spin.

15 - O decaimento do nêutron tem um valor do $\log ft$ medido igual a 1187. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que a razão $g^{\text{GT}}/g^{\text{F}}$ é cerca de 1,2.

16 - Prove a afirmativa feita após a equação (7.23).

17 - Usando os sinais preponderantes das helicidades das partículas emitidas, verifique, em cada caso, se a tendência é a emissão do elétron (pósitron) no mesmo sentido ou em sentido contrário ao antineutrino (neutrino): a) β^- , $0^+ \rightarrow 0^+$ b) β^+ , $0^+ \rightarrow 0^+$ c) β^- , $1^+ \rightarrow 0^+$ d) β^+ , $1^+ \rightarrow 0^+$.

18 - Na captura eletrônica



com o berílio inicialmente em repouso, a energia de recuo dos átomos de lítio (massa de $6536 \text{ MeV}/c^2$) foi medida como sendo $(55,9 \pm 1.0) \text{ eV}$ [R. Davis, *Phys. Rev.* **86** (1952) 976]. A diferença de massa entre os dois átomos é $0,862 \text{ MeV}/c^2$. Mostre que o resultado dessa experiência limita a massa do neutrino a um valor menor do que $160 \text{ keV}/c^2$.

19 - Usando a equação (7.36) e a figura 7.4, determine a proporção de capturas eletrônicas em relação ao decaimento- β^+ do $^{125}_{55}\text{Cs}$, que emite pósitrons de energia máxima $2,05 \text{ MeV}$. Compare o valor obtido com o extraído da figura 7.12 e também com o valor real, apresentado, por exemplo, na Tabela de Isótopos de Lederer e Shirley.

8 - DECAIMENTO GAMA

8.1 - Introdução

O sistema quântico de A núcleons que constitui o núcleo tem, acima de seu estado de mais baixa energia, o estado fundamental, uma quantidade muito grande de estados excitados, possíveis de serem atingidos se energia suficiente for cedida ao sistema. As transições entre esses estados, tanto na excitação quanto na desexcitação, são realizadas principalmente através de radiação- γ , que abrange uma faixa de alta energia no espectro eletromagnético. Essa faixa se situa basicamente entre 0,1 MeV e 10 MeV, sendo um raio- γ de 1 MeV cerca de 3×10^5 vezes mais energético do que um raio de luz violeta.

Além da energia liberada, outro parâmetro característico é a meia-vida do estado emissor. Meias-vidas de emissão- γ podem variar de 10^{-17} s a 100 anos; mesmo o limite inferior ainda é grande comparado aos tempos nucleares mais curtos, o tempo, digamos, de uma partícula com velocidade próxima a da luz atravessar um diâmetro nuclear ($\cong 10^{-22}$ s). Assim, os estados que decaem por radiação-gama podem ser considerados quasi-estacionários. Isso se reflete nas larguras de nível, calculadas por (6.37): mesmo uma meia-vida de 10^{-17} s corresponde a uma largura de cerca de 70 eV, pequena comparada aos valores das energias dos próprios níveis.

8.2 - Taxas de Transição

O cálculo da taxa de decaimento por emissão- γ requer o emprego de uma teoria quântica para a radiação mas é comum apresentar os resultados quânticos corretos como extensão de cálculos da eletrodinâmica clássica.

Classicamente, a radiação eletromagnética emitida por um sistema é o resultado da variação no tempo da densidade de carga ou da distribuição de correntes no sistema. Essa energia emitida se faz por dois tipos de radiação multipolar, a elétrica e a magnética. Cada uma delas se expressa como função dos momentos multipolares correspondentes, que são as quantidades que contém os parâmetros (carga e corrente) variáveis do sistema. Se o comprimento de onda da radiação emitida for grande em relação às dimensões do sistema, o que é válido para raios- γ de energia $\gtrsim 10$ MeV, a potência emitida por cada multipolo é dada por ([Ja75], cap.16):

$$P_E(lm) = \frac{8\pi(l+1)c}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2} |Q_{lm}|^2 \quad (8.1)$$

para radiações multipolares elétricas e

$$P_M(lm) = \frac{8\pi(l+1)c}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+2} |M_{lm}|^2 \quad (8.2)$$

para as correspondentes radiações magnéticas. Q_{lm} e M_{lm} são os momentos multipolares elétrico e magnético, respectivamente, calculados pelas expressões

$$Q_{lm} = \int r^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (8.3)$$

$$M_{lm} = - \int r^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) \frac{\text{div}[\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})]}{c(l+1)} dV. \quad (8.4)$$

Nas fórmulas (8.1) a (8.4), ρ é a densidade de carga, \mathbf{j} a densidade de corrente, l a ordem multipolar ($l = 1$, dipolo; $l = 2$, quadrupolo, etc.) e m assume valores $m = -l, -l + 1, \dots, l$ para cada valor de l . O fatorial duplo $(2l + 1)!!$ é definido como o produto $(2l + 1)(2l - 1)(2l - 3)\dots 1$.

As expressões (8.3) e (8.4) para os momentos se tornam particularmente simples de calcular para $l = 1, m = 0$. Nesse caso, obtemos os valores

$$Q_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \int z\rho(\mathbf{r}) dV \quad (8.5)$$

e

$$M_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2c} \int (xj_y - yj_x) dV \quad (8.6)$$

e, se levarmos em consideração que $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, veremos que o momento multipolar magnético é menor do que o elétrico por um fator da ordem de v/c . Como as velocidades das cargas no interior do núcleo são muito menores do que a velocidade da luz, os momentos multipolares magnéticos são, em geral, muito menores do que os momentos elétricos correspondentes à mesma ordem, exceto quando as regras de seleção impedem a existência do decaimento através dos multipolos elétricos correspondentes (veja a próxima seção). A importância desse resultado reside no fato de ele ser geral: para todas as ordens multipolares a intensidade da radiação magnética é consideravelmente menor do que a elétrica de mesma ordem.

Quânticamente, a energia não é emitida continuamente mas sim em pacotes de energia $\hbar\omega$. O que resulta de um cálculo quântico é que a constante de desintegração é igual ao número de *quanta* emitidos na unidade de tempo quando a potência é dada pelas expressões clássicas (8.1) e (8.2). Assim,

$$\lambda_E(lm) = \frac{P_E(lm)}{\hbar\omega} = \frac{8\pi(l+1)}{\hbar l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+1} |Q_{lm}|^2 \quad (8.7)$$

e

$$\lambda_M(lm) = \frac{P_M(lm)}{\hbar\omega} = \frac{8\pi(l+1)}{\hbar l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+1} |M_{lm}|^2. \quad (8.8)$$

O núcleo emissor deve também ser tratado como um sistema quântico. Nesse sentido as expressões (8.3) e (8.4) dos momentos multipolares Q_{lm} e M_{lm} que fazem parte de (8.7) e (8.8), continuam a ter validade, desde que como densidades de carga e de corrente sejam usadas as expressões quânticas

$$\rho(a,b, \mathbf{r}) = \Psi_b^*(\mathbf{r})\Psi_a(\mathbf{r}), \quad (8.9)$$

$$\mathbf{j}(a,b, \mathbf{r}) = -\frac{ie\hbar}{2m} [\Psi_b^*(\nabla\Psi_a) - (\nabla\Psi_b^*)\Psi_a], \quad (8.10)$$

onde o argumento a(b) denota o estado inicial (final) descrito pela função de onda Ψ_a (Ψ_b). As equações (8.9) e (8.10) se referem a um único núcleon de massa m que emite radiação na sua passagem do estado a para o estado b. Assim sendo, uma soma sobre todos os prótons deve ser incorporada ao resultado, quando da substituição de (8.9) e (8.10) em (8.3) e (8.4) ([Ja75], cap. 16):

$$Q_{lm}(a,b) = e \sum_{k=1}^Z \int r_k^l Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \Psi_b^* \Psi_a d\tau, \quad (8.11)$$

$$M_{lm}(a,b) = \frac{e}{2mc(l+1)} \sum_{k=1}^Z \int r_k^l Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \text{div}[\mathbf{r}_k \times \mathbf{j}_k(a,b, \mathbf{r}_k)] d\tau. \quad (8.12)$$

A expressão (8.12) pode ser ainda colocada em outra forma, usando o operador

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (8.13)$$

e notando, através de uma integração por partes, que as duas parcelas de (8.10) são idênticas. Dessa forma, (8.12) se reescreve:

$$M_{lm}(a,b) = \frac{e\hbar}{2mc(l+1)} \sum_{k=1}^Z \int r_k^l Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \text{div}[\Psi_b^* \mathbf{L}_k \Psi_a] d\tau. \quad (8.14)$$

As expressões (8.11) e (8.14) referem-se somente à contribuição dos movimentos orbitais dos prótons. Os spins de ambos, prótons e nêutrons, também dão sua contribuição mas essa não será aqui explicitada. Um tratamento completo pode ser encontrado no livro de M. Blatt e V. Weisskopf - Theoretical Nuclear Physics [BW52], página 583.

Vimos que os valores dos momentos multipolares magnéticos são pequenos em comparação com os momentos elétricos de mesma ordem. Vamos mostrar agora que a probabilidade de transição decresce rapidamente com o aumento de l , o que restringe as

ordens multipolares que dão contribuição significativa. Para tanto, é bastante observar que o produto $(\frac{\omega}{c})^l Q_{lm}$ em (8.7) é no máximo igual a $Ze(\frac{\omega R}{c})^l$, sendo R o raio do núcleo. Para as energias que consideramos, $\frac{\omega R}{c}$ é muito pequeno, fazendo com que, para as potências maiores de l , a constante de desintegração também seja muito pequena. O conjunto desses fatos faria, em princípio, com que o dipolo elétrico fosse sempre a radiação preponderante, mas as regras de seleção que veremos a seguir podem modificar essa situação.

8.3 - Regras de Seleção

Da mesma forma que nos casos de desintegração α e β , as conservações de momento angular e paridade proibem determinadas transições entre dois estados. As regras de seleção para a radiação- γ são fáceis de estabelecer se aceitarmos o fato de que um *quantum* de radiação carrega um momento angular de módulo $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ e componente z igual a $m\hbar$, onde l é a ordem multipolar. Assim, na transição entre um estado inicial de spin I_i e um estado final de spin I_f , a conservação de momento angular impõe $I_i = I_f + l$ e, dessa forma, os valores possíveis para a ordem multipolar l devem obedecer a

$$|I_i - I_f| \leq l \leq I_i + I_f. \quad (8.15)$$

Um caso especial é a transição $0^+ \rightarrow 0^+$: como não existe radiação multipolar de ordem zero, essas transições são impossíveis de serem efetivadas através de um raio- γ , mas pode ocorrer, nesse caso, um processo de *conversão interna*, onde a energia é liberada pela ejeção de um elétron atômico. Esse processo será estudado adiante.

Quanto à paridade, transições entre estados de mesma paridade só podem ser efetuadas por radiação multipolar elétrica de ordem par ou magnética de ordem ímpar. O inverso é válido para transições onde há mudança de paridade. Podemos entender por que isso acontece examinando as equações (8.11) e (8.14). As funções que compõem o integrando têm paridade definida e é necessário que o integrando tenha paridade par, pois, do contrário, a contribuição em \mathbf{r} se cancela com a contribuição em $-\mathbf{r}$ e a integral em todo o espaço se anula. Vejamos o caso de (8.11): r^l é sempre positiva e o harmônico esférico $Y_l^m(\theta, \phi)$ é par se l é par. Para (8.11) não se anular, Ψ_a deve ter a mesma paridade de Ψ_b para l par e paridade contrária para l ímpar. Isso justifica a regra de transição para a radiação multipolar elétrica. Um procedimento semelhante aplicado à (8.14) (exercício 8.1) mostra o porquê da regra de seleção para a radiação multipolar magnética.

Tomemos um exemplo: se o estado inicial é um $3+$ e o final um $2-$, os valores possíveis de l serão 1, 2, 3, 4 e 5. Mas a mudança de paridade restringe as transições à E1, M2, E3, M4 e E5, onde E1 simboliza uma transição elétrica de dipolo ($l = 1$), etc. É oportuno lembrar, pelo que vimos anteriormente, que a transição E1 dará a contribuição mais significativa.

8.4 - Estimativa das Constantes de Desintegração

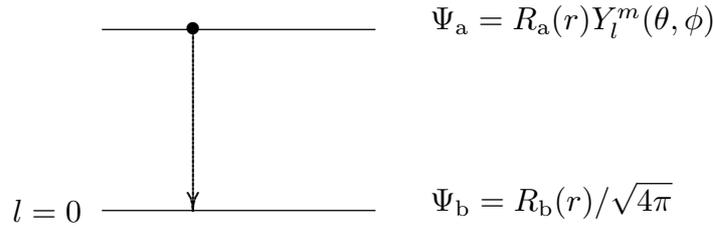


Fig. 8.1 - Desexcitação de um próton para um nível de $l = 0$.

A aplicação de (8.7) e (8.8) ao cálculo das probabilidades de transição em um núcleo real esbarra na dificuldade primordial de não serem conhecidas as funções de onda que aparecem em (8.11) e (8.14). Uma previsão das ordens de grandeza dos diversos modos pode ser feita, no entanto, para a situação bem simples proposta por Weisskopf [We51]: um próton decai do estado excitado a, descrito pela função de onda Ψ_a , para o estado b de $l = 0$ (*) e função de onda Ψ_b , de acordo com o esquema mostrado na figura 8.1. Para Ψ_a e Ψ_b poderiam ser usadas, em princípio, as funções de onda do modelo de camadas, mas estas não descrevem bem estados excitados do núcleo. Para um cálculo aproximado é suficiente fazer:

$$\begin{aligned} R_a(r) &= \text{cte} = R_a & (r < R), \\ R_a(r) &= 0 & (r > R) \end{aligned} \quad (8.16)$$

e usar a mesma aproximação para $R_b(r)$. A normalização fornece imediatamente os valores das constantes R_a e R_b :

$$R_a = R_b = \sqrt{\frac{3}{R^3}}, \quad (8.17)$$

sendo R o raio do núcleo. Dessa forma, não é difícil calcular o momento multipolar elétrico Q_{lm} em (8.11):

$$Q_{lm} = e \int r^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) \frac{3}{R^3} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{\sqrt{4\pi}} r^2 d\Omega, \quad (8.18)$$

no que resulta

$$Q_{lm} = \frac{3eR^l}{\sqrt{4\pi}(l+3)}. \quad (8.19)$$

(*) A restrição $l = 0$ facilita o cálculo mas, como se trata de uma simples estimativa, ela costuma ser ignorada nas aplicações.

A partir daí , a constante de desintegração (8.7) se escreve:

$$\lambda_E = \frac{2(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2l+1} R^{2l}, \quad (8.20)$$

onde se fez aparecer a energia de desintegração $E_\gamma = \hbar\omega$. Um cálculo similar para a constante de desintegração magnética (8.8) fornece

$$\lambda_M = \frac{20(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2l+1} R^{2l} \left(\frac{\hbar}{mcR}\right)^2, \quad (8.21)$$

onde m é a massa de um núcleo. Para um núcleo típico de massa intermediária, de $A = 120$, é fácil ver que $\lambda_E/\lambda_M \cong 100$, independentemente da ordem multipolar l . Da mesma maneira, fica claro que ambas as constantes caem rapidamente quando o valor de l aumenta.

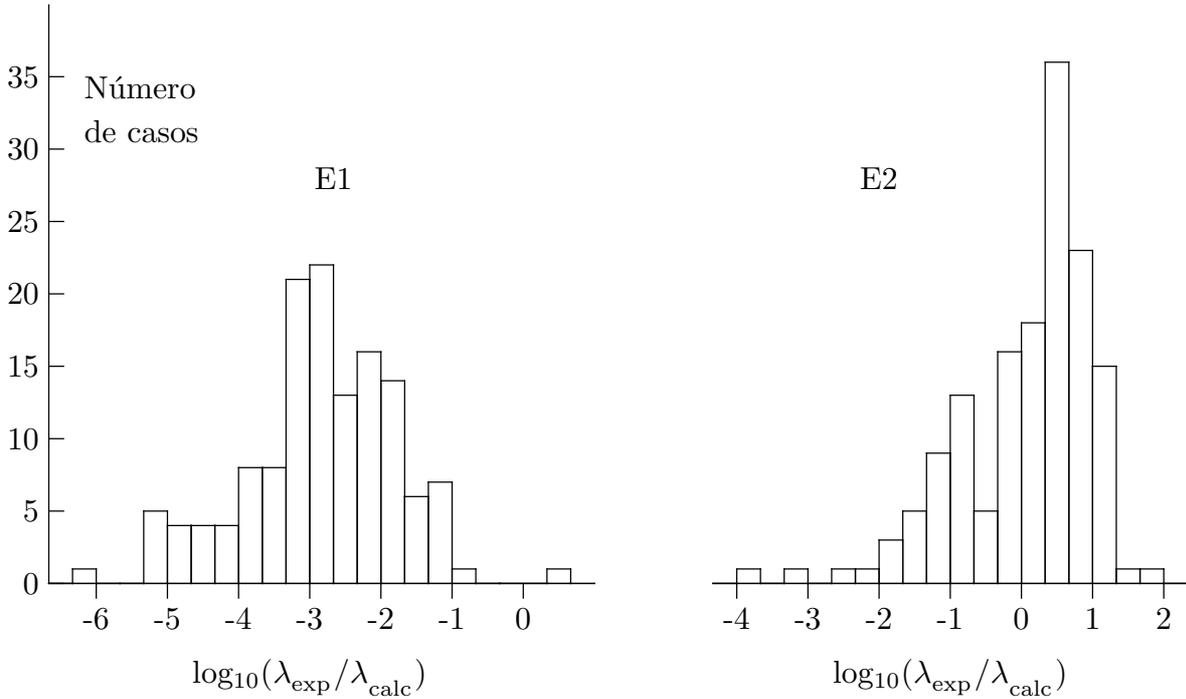


Fig. 8.2 - Distribuição da razão entre as constantes de desintegração experimental e teórica para transições do tipo E1 e E2 [Sk66].

As expressões (8.20) e (8.21) são estimativas feitas para um caso especial, destinadas a se ter uma primeira avaliação do valor das constantes de desintegração, e desacordos de várias ordens de grandeza entre o resultado do cálculo e os valores experimentais

correspondentes podem ocorrer. Em particular, se as taxas de desintegração experimentais forem inferiores ao previsto por (8.20) e (8.21), isso pode significar que as aproximações (8.16) são pouco razoáveis e que a pequena interceptação das funções Ψ_a e Ψ_b diminui o valor de λ . Valores experimentais mais altos do que o previsto por (8.20) e (8.21) podem significar, por outro lado, que a transição envolve a participação de mais de um núcleon ou mesmo a atuação coletiva de todo o núcleo.

As figuras 8.2 e 8.3 ilustram as duas situações: na figura 8.2 os valores experimentais de λ para transições de multipolaridade E1 são algumas ordens de grandeza menores que o calculado por (8.20). O oposto ocorre com a multipolaridade E2 onde o maior número de casos tem a taxa experimental maior do que a calculada; isso se deve ao fato de a transição E2 ser comum entre níveis de bandas coletivas, especialmente bandas de rotação de núcleos deformados. Na figura 8.3, por sua vez, o que se nota é um acordo muito bom entre valores teóricos e experimentais para M4. Esse comportamento é típico de transições de multipolaridade alta e tem sua explicação dada ao final da seção 8.5.

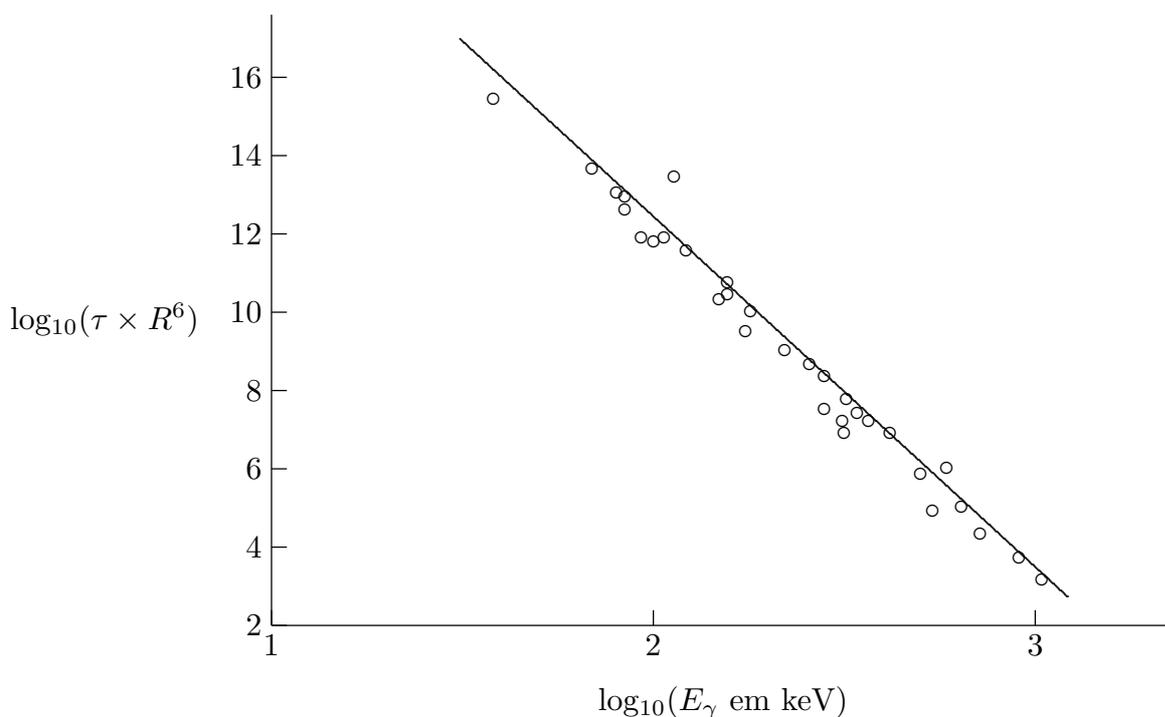


Fig. 8.3 - τ (vida-média) $\times R^6$ (R = raio do núcleo) contra a energia do raio- γ para uma série de transições do tipo M4. Existe um bom acordo entre a estimativa teórica (reta) e os dados experimentais [GS51].

8.5 - Estados Isoméricos - Ilhas de Isomeria

A transição entre dois estados de spins muito diferentes só pode ocorrer, de acordo com (8.15), com uma alta multipolaridade e esse tipo de transição tem, de acordo com (8.7) e (8.8), uma meia-vida muito grande.

Examinando a seqüência de níveis do modelo de camadas (figura 4.9) vemos que aparecem níveis adjacentes com grandes variações de spin. Isso é consequência do rebaixamento de níveis de alto spin causado pelo acoplamento spin-órbita. Tais são os níveis $1g_{\frac{9}{2}}$, $1h_{\frac{11}{2}}$ e $1i_{\frac{13}{2}}$, que completam as camadas em 50, 82, e 126 prótons (ou nêutrons), respectivamente. Uma excitação de partícula única para um desses níveis deixa o núcleo em um estado excitado de meia-vida longa. Esses são chamados *estados isoméricos*, com um valor arbitrário de 10^{-15} s sendo geralmente tomado como limite para definir uma meia-vida longa.

Os estados pertencentes ao nível $1g_{\frac{9}{2}}$ podem ser estados excitados de uma série de núcleos ímpares de Z (ou N) abaixo de 50. Da mesma forma que os estados $1h_{\frac{11}{2}}$ e $1i_{\frac{13}{2}}$ para os núcleos abaixo de 82 e 126, respectivamente. Esses grupos de núcleos que contém um desses estados isoméricos constituem as *ilhas de isomeria* e o esquema de níveis de habitantes dessas ilhas é mostrado na figura 8.4.

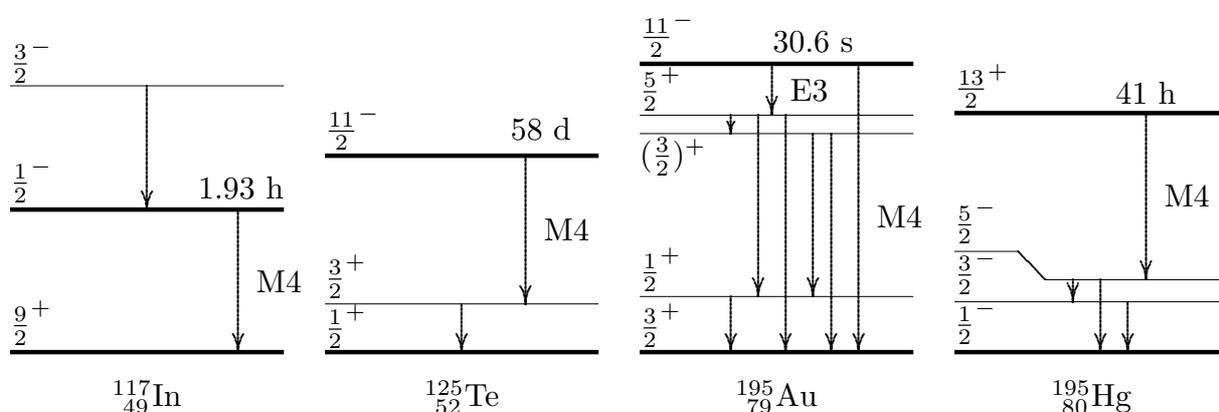


Fig. 8.4 - Exemplos de núcleos que contém um estado isomérico. Note que o estado rebaixado de outra camada, de paridade diferente, pode ser a origem ou o destino de uma transição isomérica. As escalas de energia dos quatro esquemas são independentes.

Nesses exemplos o estado isomérico decai por uma transição E3 ou M4. Esse é um comportamento bastante típico: além da multipolaridade ser alta há sempre uma mudança de paridade já que o estado de alto spin é proveniente de uma camada com estados de paridade oposta aos estados da camada onde ela se inseriu.

Com a existência das ilhas de isomeria fica fácil entender a figura 8.3. Sendo basicamente provenientes de estados isoméricos dessas ilhas, as transições do tipo M4 têm suas constantes de desintegração em bom acordo com (8.21), deduzida para transições de partícula única.

8.6 - Conversão Interna

A emissão de um raio- γ quando o núcleo passa de um estado excitado a um estado de energia inferior não é o único meio de liberar a diferença de energia entre os estados. No

processo denominado *conversão interna* um elétron atômico é ejetado com uma energia igual a essa diferença, processo esse que é possível devido à interação do elétron com o campo eletromagnético do núcleo. É importante notar que essa interação é direta e não o resultado de um efeito fotoelétrico causado por um raio- γ pré-emitido. A participação de um elétron atômico na deflagração de um processo de desexcitação nuclear já foi discutida no fenômeno de captura eletrônica estudado no capítulo 7.

A energia cinética do elétron emitido por conversão interna,

$$T = E - B, \quad (8.22)$$

é o resultado da diferença entre a energia de desexcitação E e a energia de ligação do elétron, B . A pequena energia de recuo do núcleo é desprezada. Como B só assume valores discretos, o espectro de energia (ou a distribuição de momentos) dos elétrons de conversão de uma dada transição nuclear se apresenta com uma série de picos, característicos dos níveis atômicos do elemento emissor. Um exemplo típico é mostrado na figura 8.5, onde o espectro contínuo dos elétrons emitidos por um decaimento- β contém também picos provenientes da conversão interna de um estado excitado do núcleo filho.

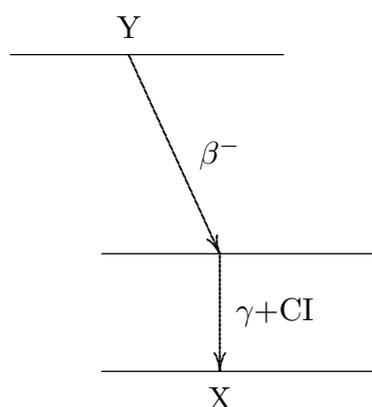


Fig. 8.5 - O estado excitado do núcleo X, alimentado pelo decaimento- β do núcleo Y, pode decair por γ e por conversão interna. O espectro de elétrons emitidos revela a presença de uma parte contínua, característica da emissão- β , a qual são superpostos os picos de conversão interna do decaimento dos estados excitados de X. O exemplo da direita é o da distribuição de momentos do decaimento β^- do ^{140}La [Be49].

A energia de ligação B do elétron atômico depende da camada ou sub-camada onde ele se encontra. A tabela 8.1 mostra os valores de B para as camadas K, L e M

Camada	Energia de ligação (keV) em cada sub-camada					
K	88,0					
L	15,86	15,20	13,04			
M	3,85	3,55	3,07	2,59	2,48	

Tabela 8.1 - Valores das energias de ligação dos elétrons nas diversas subcamadas das camadas K, L e M no chumbo.

do chumbo. Note a proximidade das energias dentro de cada camada; um equipamento de menor resolução pode não distinguir os picos das várias sub-camadas, mostrando-os como um único pico.

A dupla opção de decaimento de um estado excitado, por emissão- γ ou por conversão interna, requer uma grandeza que meça a probabilidade para um e outro decaimento. Para tanto, comecemos por observar que podemos escrever uma constante de desintegração total,

$$\lambda_t = \lambda_\gamma + \lambda_e, \quad (8.23)$$

como uma soma das constantes parciais para cada processo. Definindo

$$\alpha = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma}, \quad (8.24)$$

temos

$$\lambda_t = \lambda_\gamma(1 + \alpha) \quad (8.25)$$

que, por sua vez, pode ser desmembrada para as várias camadas

$$\lambda_t = \lambda_\gamma(1 + \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots). \quad (8.26)$$

A razão α é denominada *coeficiente de conversão interna* e é, obviamente, uma medida da probabilidade de ocorrer uma conversão interna em relação à emissão de um raio- γ .

A teoria da determinação dos coeficientes de conversão interna não será aqui apresentada. Vamos nos limitar a mostrar os resultados de um cálculo que, apesar de não ser relativístico, é capaz de prever corretamente muitas das características do fenômeno. De acordo com o cálculo [Si65], os valores de α são obtidos de

$$\alpha(EL) \cong \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{L}{L+1} \right) \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{5}{2}}, \quad (8.27)$$

$$\alpha(\text{ML}) \cong \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{3}{2}}, \quad (8.28)$$

onde EL significa transição elétrica de ordem L , com significado equivalente para ML . Z é o número atômico, n o número quântico principal (camada K, $n = 1$; L, $n = 2$, etc.) e E é a energia disponível para a transição que, desprezando-se o recuo do núcleo, é igual à diferença de energias entre os níveis inicial e final.

Várias propriedades reveladas por (8.27) e (8.28) podem ser explicitadas. A primeira é a de que a conversão interna é um fenômeno mais característico de núcleos pesados, mostrada pela dependência em Z^3 . A dependência no número quântico principal n mostra, por sua vez, que elétrons de conversão saem preferencialmente das camadas atômicas internas. Finalmente, o último fator de (8.27) e (8.28) indica que a conversão interna é maior para pequenas energias de desexcitação e altas multipolaridades. Todas essas considerações têm confirmação experimental, embora as expressões (8.27) e (8.28) sejam aproximadas e não se prestem para determinações numéricas precisas. Resultados de cálculos mais elaborados são apresentados para o coeficiente α_K na figura 8.6. Esses resultados são confiáveis o suficiente para que se possa utilizá-los na interpretação de dados experimentais. O caráter de uma transição (E ou M) e o valor de sua multipolaridade, por exemplo, podem ser obtidos a partir do conhecimento de α_K para essa transição. Isso permite determinar a paridade relativa entre os estados inicial e final.

Uma última palavra deve ser dita quanto às transições $0^+ \rightarrow 0^+$. Como não existe radiação multipolar de ordem zero, somente o processo de conversão interna é capaz de promover essa transição. O processo se dá obrigatoriamente no interior do núcleo, e assim como no caso da captura eletrônica, somente a camada K dá uma contribuição significativa.

8.7 - Absorção Ressonante - O Efeito Mössbauer

A relação entre a largura de um nível, ΔE , e a meia-vida $t_{1/2}$ do mesmo foi estabelecida no capítulo 6:

$$\Delta E t_{1/2} \cong \hbar. \quad (6.37)$$

A aplicação de (6.37) ao decaimento do estado excitado de 129 KeV do ^{191}Ir , de meia-vida igual a 10^{-10}s (figura 8.7) indica uma largura $\Delta E \cong 5 \times 10^{-6}\text{eV}$, muito pequena comparada com as energias de transição envolvidas.

Guardemos esse número e imaginemos agora uma experiência ideal mostrada na figura 8.8a. Um feixe de radiação- γ de energia variável (não se pode obter na prática, efetivamente, um feixe- γ monoenergético de energia sintonizável) em torno de 129 KeV incide em uma amostra de ^{191}Ir , que deve ser transparente para toda radiação de energia diferente da energia de seus estados excitados. Na energia de 129 KeV, entretanto, a absorção de parte do feixe para excitar aquele estado deveria causar uma queda na intensidade medida pelo detector, como indicado no gráfico.

Isso caracteriza o fenômeno de *absorção ressonante*. Em (b) um aparato experimental é montado com a idéia de atingir diretamente a condição de absorção ressonante

Fig. 8.6 - Coeficientes de conversão interna da camada K para transições multipolares: (a) elétricas e (b) magnéticas, nos elementos Ca, Sn e Th [M. A. Preston, "Physics of the Nucleus", pags. 307-308, 1962, reproduzida com a permissão da Addison-Wesley Publishing Company, Inc.].

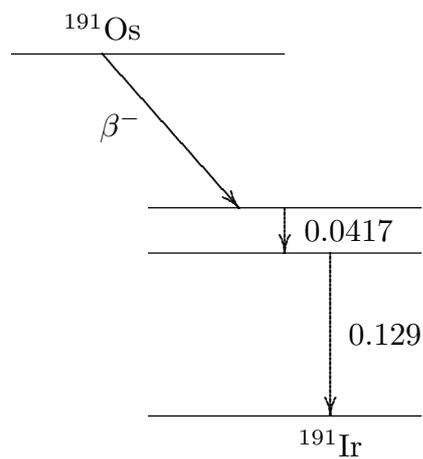


Fig. 8.7 - Estados excitados do ^{191}Ir alimentados pelo decaimento do ^{191}Os .

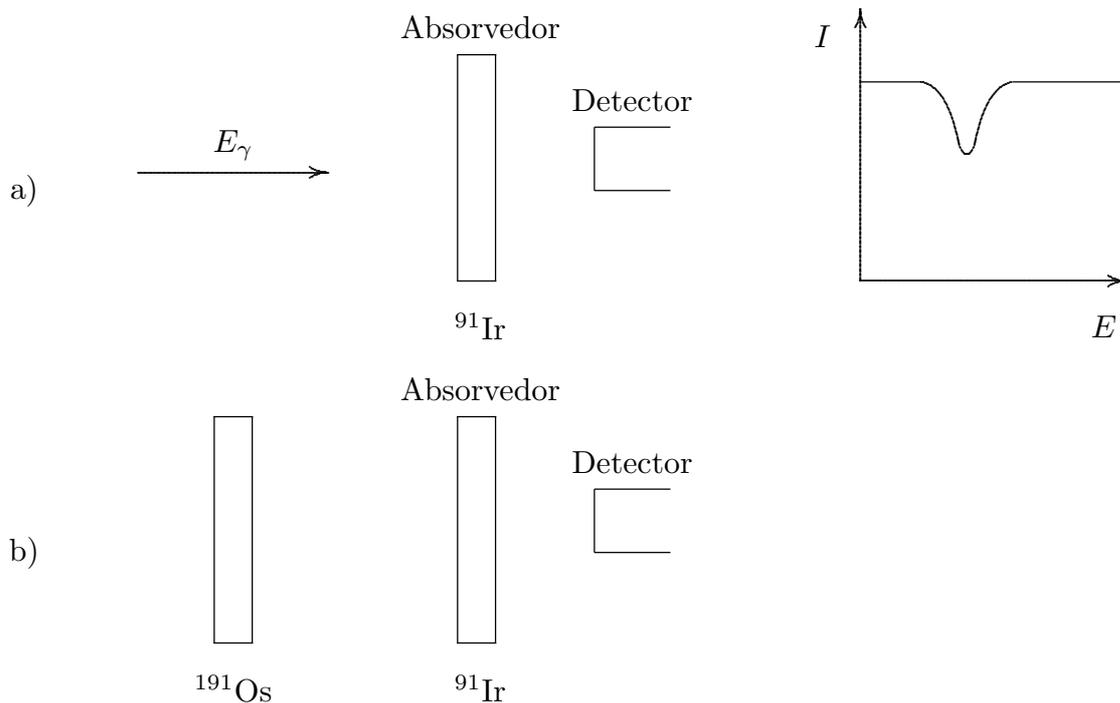


Fig. 8.8 - Experiências de detecção de absorção ressonante. Em (a), uma situação idealizada, onde um feixe de energia variável produz a curva mostrada no gráfico. Em (b), a tentativa de obter o valor mínimo da curva, usando um emissor idêntico ao absorvedor.

pois uma amostra de ^{191}Os emite raios- γ de 129 KeV, como vimos na figura 8.7. Tentemos antever o resultado: se levarmos em conta inicialmente que a emissão e a absorção do raio- γ são acompanhadas do recuo dos núcleos emissor e absorvedor, um primeiro cálculo indicaria que não pode haver absorção ressonante pois o recuo é da ordem de 0,05 eV. O raio- γ chega ao absorvedor com 0,05 eV a menos do que o valor da energia de transição quando deveria de fato chegar com 0,05 eV a mais, para compensar o recuo do núcleo absorvedor. Isso estabelece uma distância de 0,1 eV entre picos estreitos de 5×10^{-6} eV, conforme indica a figura 8.9a, e nenhuma superposição entre os picos seria possível.

Existe, no entanto, um efeito adicional que modifica a situação. Os núcleos do cristal não estão parados e sim em estados de vibração característicos da temperatura do cristal. Isso produz, por efeito Doppler, um alargamento na distribuição de energia, tanto do emissor quanto do absorvedor; podemos ver isso na parte (b) da figura 8.9. À temperatura ambiente a largura do pico passa a ser de 0,07 eV, criando uma região de interceptação, hachurada na figura, que é capaz de produzir eventos de captura ressonante.

Em 1958, Rudolf Mösbauer [Mo59] resolveu realizar um experimento de captura

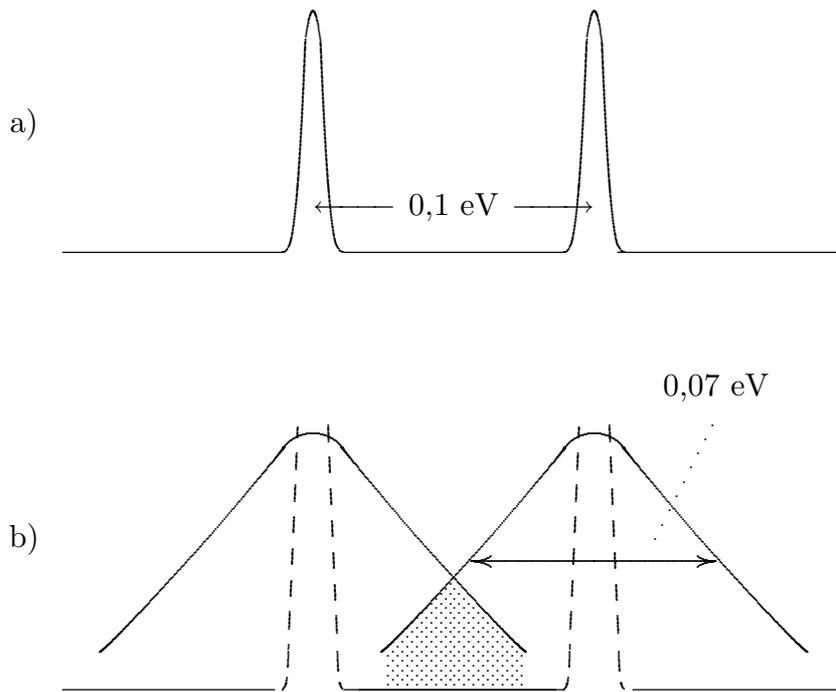


Fig. 8.9 - (a) Levando em conta o recuo mas não o efeito Doppler, não há interceptação entre os picos de emissão e absorção. (b) Com o efeito Doppler à temperatura ambiente, o alargamento dos picos produz uma região de interseção.

ressonante esfriando a fonte e o absorvedor até uma temperatura de 88°K . O esperado, nesse caso, seria o desaparecimento do fenômeno, já que a baixa temperatura causa um estreitamento na distribuição do efeito Doppler. O que ele observou, no entanto, foi um aumento na intensidade dos eventos de captura ressonante. A explicação para esse comportamento se baseia na análise do que pode ocorrer a um átomo de uma rede cristalina quando ele absorve energia. Se a energia for suficiente, um primeiro processo possível é o arrancamento do átomo de sua posição na rede. Outra possibilidade é levá-lo a um estado de energia mais alta. Se, no entanto, a energia disponível e a temperatura forem baixas o suficiente, uma terceira possibilidade é a energia ser absorvida pelo cristal inteiro, ou, mais especificamente, por um grande número de átomos ($\sim 10^8$) alcançados por uma onda acústica que se propaga pelo cristal. Essa última possibilidade é a explicação da existência de captura ressonante nessas condições: as energias de recuo dos núcleos devidas à emissão dos raios- γ são, agora, praticamente desprezíveis, pois a massa a recuar é muito grande.

Os eventos de captura ressonante se devem, nesse caso, não ao efeito Doppler, que nessa temperatura é muito pequeno, mas à própria interceptação dos picos de energia com suas larguras naturais, mostrados na figura 8.9a. No *efeito Mössbauer*, como é designado, a separação de $0,1\text{ eV}$ assinalada na figura 8.9a desaparece, e um aparato como o usado originalmente por Mössbauer permite inclusive que se meça a largura natural do pico. Isso é visto na figura 8.10: uma fonte de ^{191}Os (ver figura 8.7) é colocada

em um suporte circular que pode girar, com o intuito de se produzir um efeito Doppler artificial. A radiação sai por uma pequena abertura na blindagem de chumbo e atinge um detector situado atrás de um absorvedor de ^{191}Ir . Fonte e absorvedor são imersos em criostatos que os mantém a uma temperatura baixa o suficiente para a obtenção dos efeitos desejados. Essa é a realização, em condições especiais, da experiência descrita na figura 8.8.

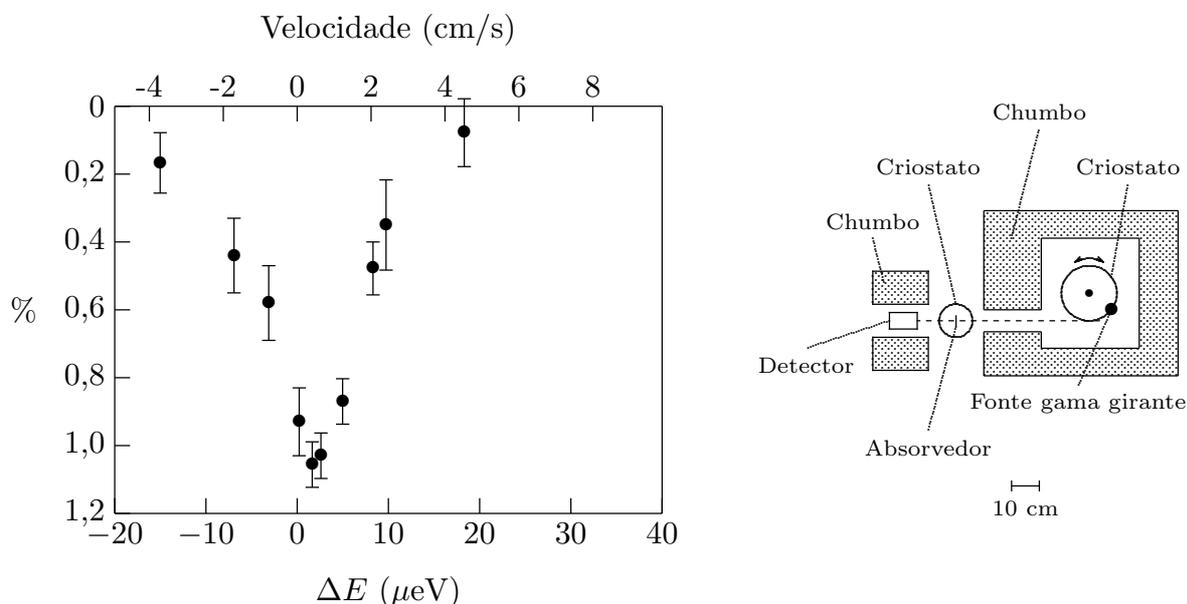


Fig. 8.10 - Medição da largura natural do nível de 129 keV do ^{191}Ir com o arranjo experimental de Mössbauer. A ordenada indica a redução percentual da intensidade no detector.

O gráfico da figura 8.10 mostra o valor da intensidade percentual perdida no absorvedor. Para velocidade zero da fonte a absorção ressonante consome cerca de 1% da radiação. Quando a fonte se move, a absorção não cai a zero devido à largura natural do nível e a experiência permite desse modo medir essa largura. Vemos que, pelo fato de a largura natural ser muito pequena ($5 \times 10^{-6}\text{eV}$), bastam velocidades de alguns cm/s para se obter os dados necessários.

Graças à extrema precisão com que consegue medir diferenças de energia, o efeito Mössbauer tem grande aplicação dentro e fora da física nuclear. Como um exemplo do primeiro caso, se pode citar o estudo da estrutura hiperfina de níveis nucleares, que sofrem o mesmo deslocamento ($\Delta E \cong 10^{-7} - 10^{-6}\text{eV}$) dos níveis atômicos, mas cuja razão $\Delta E/E$, sendo E uma energia nuclear típica, a torna muito mais difícil de medir.

Fora do âmbito da física nuclear, uma experiência de extrema precisão foi conduzida por Pound e Ribka [PB59] em 1959. Eles mediram a variação da energia de um fóton causada pelo campo gravitacional terrestre. A medição foi realizada na torre de 22,5 m de altura da Universidade de Harvard. Raios- γ de uma fonte de ^{57}Fe situada no solo atingiam o absorvedor e o detector situados no topo do prédio e a variação na

energia causada pelo campo gravitacional pôde ser detectada. A influência de um campo gravitacional sobre um fóton é uma previsão da teoria da relatividade geral e já tinha sido confirmada por meios astronômicos. Os resultados de Pound e Ribka confirmaram a previsão teórica e foram os primeiros a serem obtidos em condições de laboratório terrestres.

Sugestões para Leitura

- A mecânica quântica do campo de radiação eletromagnético é considerado em detalhe nas seções 3.1-3.9 de: M. G. Bowler, "Nuclear Physics", Pergamon, Oxford, 1973.
- Um livro acessível para a compreensão da radiação multipolar electromagnética é: M. E. Rose, "Multipole Fields", Wiley, New York, 1955.
- Para o estudo da radiação de multipolo e da conversão interna veja, respectivamente, os capítulos 15 e 16 de: "Alpha-, Beta- and Gamma-ray Spectroscopy", editado por K. Siegbahn, North-Holland, Amsterdam, 1965.
- O efeito Mössbauer é revisto em: G. K. Weithem, "Mössbauer Effect: Principles and Applications", Academic, New York, 1964.
- Um estudo atual do efeito Mössbauer está em: T. C. Gibb, "Principles of Mössbauer Spectroscopy", Halsted, New York, 1976.

Exercícios

1 - Mostre, através da análise da paridade das funções que compõem o integrando de (8.14), que transições multipolares magnéticas de ordem par só podem ocorrer entre estados de paridade diferente e vice-versa.

2 - Dê, para as seguintes transições- γ , todos os multipolos permitidos e indique que multipolo deve ser mais intenso na radiação emitida.

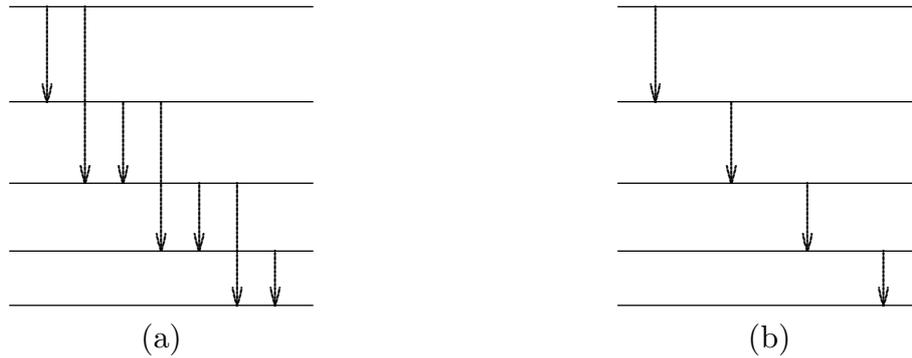
- | | |
|---|--|
| (a) $\frac{7^-}{2} \rightarrow \frac{3^-}{2}$ | (d) $4^+ \rightarrow 2^+$ |
| (b) $\frac{7^+}{2} \rightarrow \frac{7^-}{2}$ | (e) $0^- \rightarrow 0^+$ |
| (c) $0^- \rightarrow 3^-$ | (f) $\frac{11^-}{2} \rightarrow \frac{5^+}{2}$ |

3 - O $^{167}_{68}\text{Er}$ tem a seguinte seqüência de estados, começando com o fundamental:

$$\frac{7^+}{2}, \frac{9^+}{2}, \frac{1^-}{2}, \frac{3^-}{2}, \frac{5^-}{2}$$

a) Qual deles pode ser um estado isomérico? b) Das dez transições possíveis, qual tem a menor chance de ocorrer? c) Faça um esboço do esquema de níveis e das transições, indicando a multipolaridade de cada uma.

4 - Dê uma explicação para o fato de o decaimento- γ entre os níveis de uma banda de rotação ter, em muitos casos, o aspecto visto na figura (a) abaixo para núcleos ímpares e na figura (b) para os núcleos par-par.



5 - O estado fundamental $\frac{3}{2}^-$ do $^{247}_{97}\text{Bk}$ decai por emissão- α para o $^{243}_{95}\text{Am}$ que tem, acima do estado fundamental $\frac{5}{2}^-$, a seqüência de estados excitados $\frac{5}{2}^-, \frac{7}{2}^-, \frac{5}{2}^+, \frac{9}{2}^-, \frac{7}{2}^+, \frac{9}{2}^+, \frac{11}{2}^+, \frac{3}{2}^-, \frac{5}{2}^-$. Estabeleça alguns caminhos plausíveis para o decaimento até chegar ao estado fundamental do amerício e tente inferir qual é o mais provável.

6 - Repita o problema 4 para o decaimento- β^+ do estado fundamental $\frac{9}{2}^-$ do $^{207}_{83}\text{Bi}$. O $^{207}_{82}\text{Pb}$ tem, acima do estado fundamental $\frac{1}{2}^-$, a seqüência de estados excitados $\frac{5}{2}^-, \frac{3}{2}^-, \frac{13}{2}^+, \frac{7}{2}^-$.

7 - O $^{154}_{64}\text{Ga}$ apresenta, acima de seu estado fundamental 0^+ , os estados excitados relacionados abaixo (energias em keV):

Spin	Energia	Spin	Energia	Spin	Energia
2^+	123	6^+	718	4^+	1048
4^+	371	2^+	816	3^+	1128
0^+	681	2^+	996	8^+	1145

a) Determine as multipolaridades e as energias dos raios- γ emitidos quando o nível 8^+ de 1145 keV decai pela via mais provável até o estado fundamental. b) O mesmo para o nível 2^+ de 816 keV. c) O mesmo para o nível 0^+ de 681 keV. É possível a esse nível decair diretamente para o estado fundamental?

8 - O estado isomérico $\frac{13}{2}^+$ do ^{199}Hg decai por emissão- γ de multipolaridade M4 para um estado $\frac{5}{2}^+$, 368 keV abaixo dele. Determine o valor de λ_M (8.21) e veja se o resultado é coerente com o valor da meia-vida experimental de 44 minutos daquele nível isomérico. Não deixe de levar em conta que esse mesmo estado do Hg também decai por conversão interna, com um coeficiente $\alpha = 4,4$.

9 - Utilizando uma tabela de isótopos como a de Lederer e Shirley [LS78], procure verificar a extensão das ilhas de isomeria. Tente localizar transições com multipolaridades mais altas do que E3 e M4.

10 - Em um estudo de elétrons de conversão emitidos em um processo de decaimento, as seguintes energias (em keV) dos elétrons foram medidas: 176,8; 310,7; 363,5; 540,2; 592,3; 645,9; 653,7; 966,6; 1019,2; 1206,7. As energias de ligação dos elétrons são (em

keV): 63,3 (K), 10,5 (L) e 2,3 (M). Qual é o menor número de raios- γ que pode produzir os grupos de elétrons observados, e quais são as energias deles?

11 - O estudo da transição entre dois níveis do ^{108}Pd , distantes 434 keV um do outro, mostrou que em cada 1124 decaimentos- γ há a emissão de 10 elétrons de conversão.

a) Use as fórmulas (8.24)-(8.28) para obter o valor de α_K . b) Com o auxílio do gráfico da figura 8.6, verifique se esse resultado é compatível com a informação de que a transição em questão é a desexcitação de um estado pertencente a uma banda de rotação do Pd.

12 - A transição de 14,4 keV, 98 ns, do ^{57}Fe é muito utilizada para a produção do efeito Mössbauer. Para essa transição calcule: (a) sua largura natural; (b) a energia de recuo; (c) a largura Doppler à temperatura ambiente; (d) a largura Doppler à temperatura do hélio líquido. Utilize para os dois últimos itens a fórmula para largura Doppler: $D = 2\sqrt{T_R k T}$, onde T_R é a energia de recuo, k a constante de Boltzman e T a temperatura absoluta.

9 - O ESPALHAMENTO NÚCLEON-NÚCLEON

9.1 - O Problema do Espalhamento

Quando uma onda de qualquer tipo atinge um pequeno obstáculo, são produzidas ondas secundárias (circulares ou esféricas) que se afastam deste, indo para o infinito. Da mesma forma, um feixe de partículas monoenergéticas, que pode ser representado por uma onda plana, sofre espalhamento quando encontra uma região onde existe um potencial $V(\mathbf{r})$ criado por um núcleo (figura 9.1). Ao contrário dos problemas quânticos de estados ligados, onde se procura os valores possíveis para a energia do sistema, a solução dos problemas de espalhamento consiste em determinar a distribuição angular das partículas espalhadas, podendo a energia total do sistema alvo+projétil assumir qualquer valor positivo.

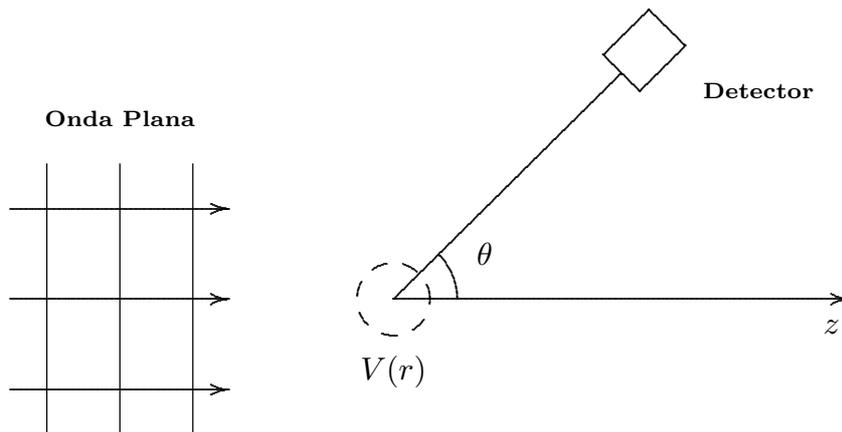


Fig. 9.1 - Espalhamento de uma onda plana por um potencial $V(r)$ limitado a uma pequena região do espaço.

A distribuição angular é determinada pela probabilidade de encontrar as partículas espalhadas em função da direção de espalhamento e essa probabilidade está ligada diretamente às auto-funções. Assim, dada a onda plana incidente, cuja parte estacionária pode ser representada por

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikz}, \quad (9.1)$$

e um potencial espalhador $V(\mathbf{r})$, nosso problema se resume em encontrar a função de onda das partículas espalhadas, ou função de onda espalhada.

Em problemas de Física Atômica e Nuclear os detectores se encontram longe dos centros espalhadores em relação às dimensões destes, ou seja, em uma região onde as partículas não sofrem mais a ação do potencial. Assim, nosso interesse se limitará à parte assintótica da função de onda espalhada, isto é, à sua forma quando $r \rightarrow \infty$. Quando um potencial de curto alcance $V(r)$, suposto por simplicidade esfericamente simétrico, atua sobre as partículas do feixe incidente, um detector colocado na região assintótica registrará não só a presença da onda plana mas também a de partículas espalhadas pelo potencial. Ou seja, à onda plana vai se somar uma onda esférica emergente criada pelo centro espalhador e a função de onda longe desse centro se escreve

$$\Psi \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (9.2)$$

onde o símbolo \sim significa valor assintótico. A existência da função $f(\theta)$ traduz o fato de que as direções de espalhamento não são igualmente prováveis. Essa função se denomina *amplitude de espalhamento* e tem, como veremos a seguir, um papel essencial na teoria do processo.

A corrente de probabilidade,

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\Psi^* \nabla \Psi), \quad (9.3)$$

será agora empregada na definição de uma função que mede a distribuição angular das partículas espalhadas por $V(r)$. Para a onda plana incidente o valor da corrente é

$$j_i = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(e^{-ikz} \frac{d}{dz} e^{ikz} \right) = \frac{\hbar k}{m} = v \quad (9.4)$$

e para a onda esférica emergente

$$j_r \sim \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \right\} = \frac{v}{r^2} |f(\theta)|^2. \quad (9.5)$$

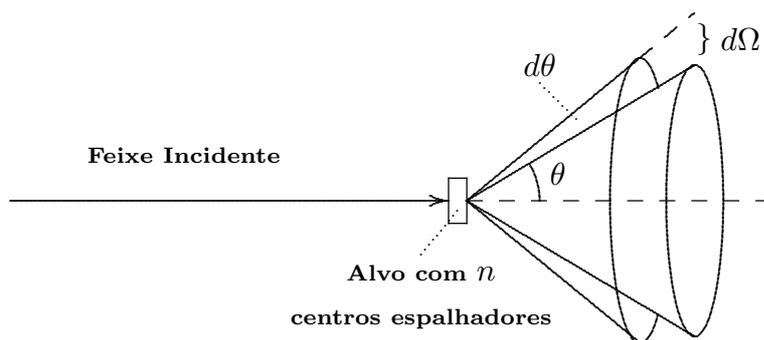


Fig. 9.2 - Grandezas usadas na definição da seção de choque diferencial.

Definimos a *seção de choque diferencial*, função do ângulo θ (ver figura 9.2), por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN/d\Omega}{n\Phi}, \quad (9.6)$$

sendo dN o número de eventos observados em $d\Omega$ na unidade de tempo, n o número de centros espalhadores do alvo abrangidos pelo feixe e Φ o fluxo incidente (número de partículas incidentes por unidade de área e por unidade de tempo). $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ é o ângulo sólido situado entre os cones definidos pelas direções θ e $\theta + d\theta$. Se a nossa hipótese de simetria esférica para o potencial espalhador não for válida, o ângulo sólido é o definido pela direção θ, ϕ , ou seja, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

A definição (9.6) é geral e os *eventos observados*, no presente caso, são partículas espalhadas pelo potencial $V(r)$. $d\sigma/d\Omega$ tem dimensão de área e seu valor é obtido de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2}{j_i}, \quad (9.7)$$

pelo fato de o número de partículas que atravessa uma determinada área na unidade de tempo ser medido pelo fluxo da corrente de probabilidade através daquela área. Usando (9.4) e (9.5) fica claro que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (9.8)$$

ficando assim a determinação da distribuição angular reduzida ao cálculo da amplitude de espalhamento $f(\theta)$.

A *seção de choque total* é obtida integrando-se (9.8):

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} |f(\theta)|^2 d(\cos\theta) \quad (9.9)$$

e seu significado é óbvio a partir da definição (9.6): a seção de choque total mede o número de eventos por núcleo-alvo por unidade de tempo dividido pelo fluxo incidente (número de partículas incidentes/unidade de área/unidade de tempo). Ela deve, nesse sentido, incluir eventos para os quais não fica definida uma seção de choque diferencial, como é o caso da absorção de partículas do feixe incidente pelo núcleo.

9.2 - Expansão em Ondas Parciais

Quando estudamos interações regidas por um potencial central $V(r)$, soluções da equação de Schrödinger

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi = 0 \quad (9.10)$$

podem ser escritas como combinações lineares dos produtos de soluções separadas nas partes radial e angular:

$$\Psi = \sum_{l,m} a_{l,m} \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (9.11)$$

onde $u_l(r)$ obedece à equação radial

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \quad (9.12)$$

e à condição de contorno

$$u_l(0) = 0. \quad (9.13)$$

A simetria axial de nosso problema permite que se elimine a dependência em ϕ de (9.11) escrevendo

$$\Psi = \sum_l a_l P_l(\cos\theta) \frac{u_l(r)}{kr}, \quad (9.14)$$

onde a constante $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ foi introduzida para facilitar a aplicação posterior da expansão.

As parcelas de (9.14) podem ser entendidas como *ondas parciais*, com as quais a solução geral Ψ pode ser composta. Uma expressão como (9.14) é conveniente porque, sendo $V(r)$ esfericamente simétrico, o momento angular é uma constante de movimento e estados de diferentes valores do momento angular contribuem de forma independente para o espalhamento. Sendo assim, convém também apresentar a onda plana por sua expansão em polinômios de Legendre

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta), \quad (9.15)$$

onde $j_l(x)$ são funções de Bessel esféricas e $P_l(\cos\theta)$ os polinômios de Legendre.

A expressão (9.15) tem a forma da expressão (9.14). Isso significa que a onda plana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ pode ser entendida como a soma de um conjunto de ondas parciais cada uma com momento angular orbital $\sqrt{l(l+1)}\hbar$. Os termos $j_l(kr)P_l(\cos\theta)$ especificam a dependência radial e angular da onda parcial l , o peso da contribuição de cada parcela sendo dado pela amplitude $(2l+1)$ e pelo fator de fase i^l . Usando argumentos clássicos podemos dar uma interpretação para o valor dessa amplitude. Vamos considerar uma superfície perpendicular à direção de propagação da onda plana, e imaginar um conjunto de círculos de raio $b_l = l\lambda$, com o comprimento de onda $\lambda = \lambda/2\pi = 1/k$, centrados no ponto onde o eixo z atravessa a superfície (veja a figura 9.3). Se o feixe de partículas move-se ao longo do eixo z , o momento angular clássico de uma partícula em relação à

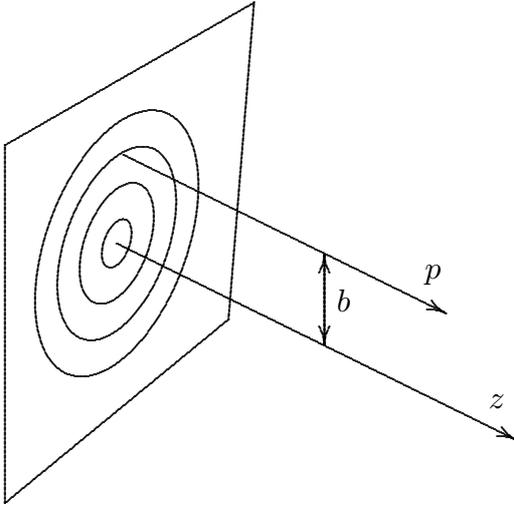


Fig. 9.3 - Representação clássica de uma onda plana, a cada onda parcial l correspondendo um parâmetro de impacto b .

origem do sistema de coordenadas é o produto do parâmetro de impacto b pelo momento linear $p = \hbar k$. Logo, todas as partículas que passam por um anel de raio interno b_l e raio externo b_{l+1} terão momento angular orbital entre $l\hbar = l\hbar$ e $(l+1)\hbar = (l+1)\hbar$. No limite clássico l é grande e $l+1 \cong l$. Dessa forma podemos dizer que todas as partículas que passam pelo anel têm momento angular orbital $l\hbar$. No entanto, ainda dentro do raciocínio clássico, uma partícula pertencente a um feixe uniforme pode ter qualquer parâmetro de impacto e a probabilidade de ela passar por um dos anéis é proporcional à área A daquele anel:

$$A = \pi(b_{l+1}^2 - b_l^2) = \pi\lambda^2 [(l+1)^2 - l^2] = \pi\lambda^2(2l+1). \quad (9.16)$$

Vemos que $(2l+1)$ é a probabilidade relativa de que uma partícula em um feixe uniforme tenha um momento angular orbital $l\hbar$, que é o limite clássico para o momento angular orbital $\sqrt{l(l+1)}$ associado à onda parcial l .

A grandes distâncias da origem as funções de Bessel esféricas reduzem-se a expressão simples

$$j_l(kr) \sim \frac{\text{sen}(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} = \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2ikr}. \quad (9.17)$$

A incorporação de (9.17) a (9.15) resulta em

$$e^{ikr\cos\theta} \sim \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \left[\frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{kr} \right], \quad (9.18)$$

que representa a forma assintótica de uma onda plana.

Na equação (9.18) a primeira parcela entre colchetes corresponde a uma onda esférica emergente e a segunda a uma onda esférica incidente. Assim, cada onda parcial em (9.18) é, a grandes distâncias da origem, uma superposição de duas ondas esféricas, uma incidente e uma emergente. O fluxo radial total para a função de onda $\Psi_i = e^{ikr \cos \theta}$ é nulo, já que o número de partículas livres que entra em uma região é o mesmo que sai. Isso pode ser facilmente demonstrado utilizando-se (9.18) em (9.3) [o exercício 9.1 propõe essa demonstração para a expressão mais geral (9.19)].

Vamos agora entender Ψ em (9.14) como a solução de um problema de espalhamento causado por um potencial espalhador $V(r)$. A forma assintótica de Ψ pode ser obtida se observarmos que a presença do potencial tem como efeito causar uma perturbação na parte emergente da onda plana, perturbação essa que pode ser representada por uma função de módulo unitário, $S_l(k)$.

Partindo de (9.18), isso conduz a

$$\Psi \sim \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{S_l(k) e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{kr}, \quad (9.19)$$

onde a função $S_l(k)$ pode ser representada por

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l}. \quad (9.20)$$

Ao escrevermos a forma (9.20) estamos admitindo que o espalhamento é elástico. O módulo unitário de $S_l(k)$ mantém o mesmo valor para a corrente de probabilidade e não permite que a presença do potencial tire ou coloque partículas no canal elástico k (exercício 9.1). Da comparação de (9.19) e (9.14) podemos obter as expressões de a_l e da forma assintótica de $u_l(r)$:

$$a_l = i^l (2l+1) e^{i\delta_l} \quad (9.21)$$

e

$$u_l(r) \sim \text{sen} \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (9.22)$$

$u_l(r)$ difere da forma assintótica da função radial de uma partícula livre pela presença dos desvios de fase (*phase shifts*) δ_l ; a presença do potencial espalhador faz aparecer em cada onda parcial um desvio de fase δ_l e o problema do espalhamento ficaria solucionado com a determinação desses desvios de fase a partir de um potencial $V(r)$ dado. De fato, o uso de (9.19) e (9.18) em (9.2) resulta em (exercício 9.2)

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \text{sen} \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (9.23)$$

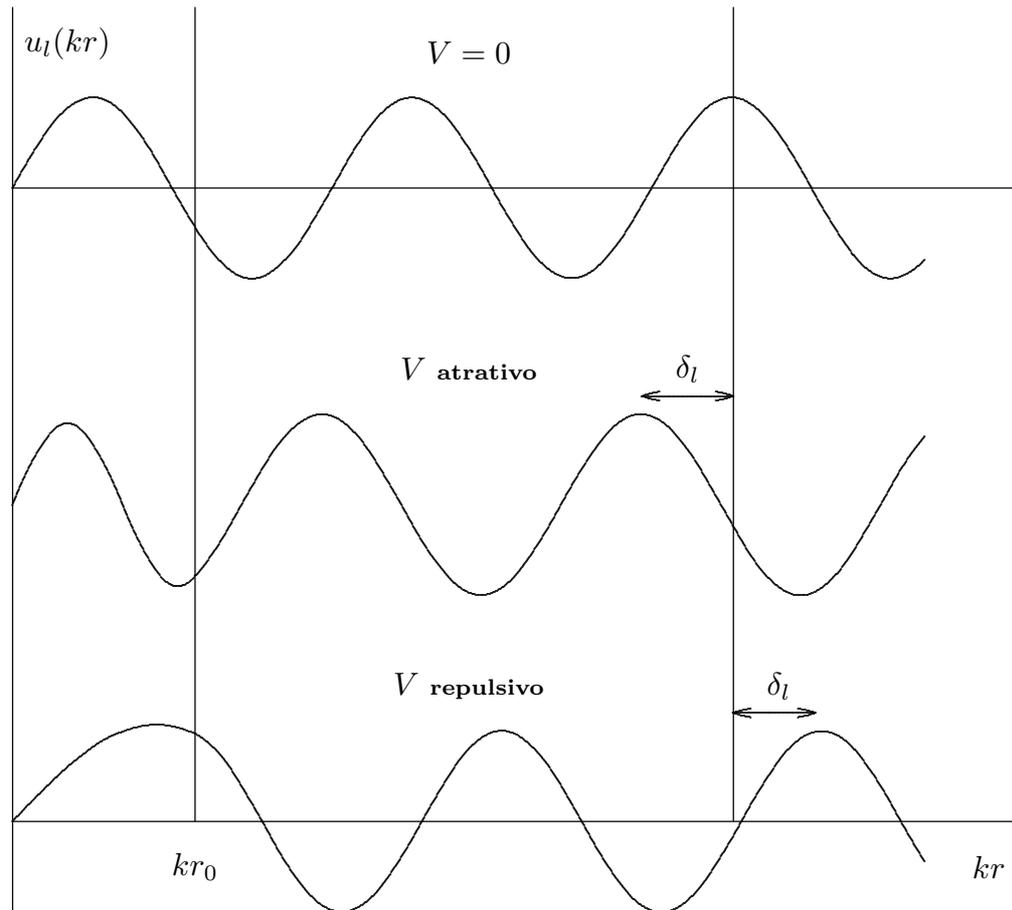


Fig. 9.4 - Parte radial da função de onda para três potenciais diferentes, mostrando como o sinal do desvio de fase é determinado pelo comportamento da função na região $r < r_0$ onde atua o potencial.

e a seção de choque diferencial (9.8) se obtém a partir do conhecimento dos desvios de fase δ_l .

Os desvios de fase são calculadas resolvendo-se a equação (9.12) para cada l e comparando-se a fase de $u_l(r)$, para algum r grande, com a fase de $j_l(kr)$ para o mesmo valor de r . Isso está ilustrado na figura 4, para um valor genérico de l e três diferentes situações do potencial $V(r)$.

A primeira curva mostra $u_l(r)$ para o caso em que $V(r) = 0$ para todo r . Nesse caso, $u_l(r) = j_l(kr)$ e não temos desvio de fase para nenhum l . A curva do meio mostra $u_l(r)$ quando se introduz um pequeno potencial atrativo atuante dentro de um certo raio r_0 , ou seja, $V(r) < 0$ para $r < r_0$, e $V(r) = 0$ quando $r > r_0$. Da equação (9.12) vemos que, com esse potencial atrativo, $|E - V(r)| > E$ na região do potencial e a grandeza d^2u_l/dr^2 será maior naquela região do que quando o potencial é zero. Assim, $u_l(r)$ oscilará mais rapidamente para $r < r_0$. Para $r > r_0$, o comportamento é o mesmo que no caso $V(r) = 0$, exceto que a fase é desviada. Dessa forma vemos que com um pequeno potencial atrativo, $u_l(r)$ é “puxada para dentro”, o que torna sua fase

adiantada e o desvio de fase positiva. A última curva mostra $u_l(r)$ para o caso de um pequeno potencial repulsivo, isto é, $V(r) > 0$ quando $r < r_0$, e $V(r) = 0$ quando $r > r_0$. Nesse caso, $|E - V(r)| < E$ na região do potencial e a grandeza d^2u_l/dr^2 será menor naquela região do que quando o potencial é zero. O resultado é que, para um potencial repulsivo, $u_l(r)$ é “puxada para fora”, sua fase é retardada e o desvio de fase é negativo.

A seção de choque total, por sua vez, tem a expressão (exercício 9.3)

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \text{sen}^2 \delta_l, \quad (9.24)$$

obtida pela integração (9.9).

Das expressões (9.23) e (9.24) resulta uma importante relação. Para obtê-la basta observar em (9.23) que

$$\text{Im } f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \text{sen}^2 \delta_l \quad (9.25)$$

e comparar esse resultado com (9.24) para obter

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0). \quad (9.26)$$

Essa relação é conhecida como *teorema ótico*. Ela conecta a seção de choque total com a amplitude de espalhamento no ângulo zero e isso é fisicamente compreensível: a seção de choque mede a retirada de partículas do feixe incidente que decorre, por sua vez, da interferência destrutiva entre o feixe incidente e o espalhado no ângulo zero [Sc54]. Veremos no capítulo 10 que o teorema ótico não é restrito ao espalhamento elástico, sendo válido também para processos inelásticos.

Na soma (9.24) cada momento angular contribui no máximo com uma seção de choque

$$(\sigma)_{\text{max}} = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1), \quad (9.27)$$

valor da mesma ordem de grandeza da seção de choque clássica máxima por unidade \hbar de momento angular. Realmente, se utilizarmos a estimativa $b = l/k$ para o parâmetro de impacto, a contribuição de um intervalo $\Delta l = 1$, ou $\Delta b = 1/k$, para a seção de choque total será

$$\sigma_l = 2\pi b \Delta b = 2\pi \frac{l}{k^2}. \quad (9.28)$$

Para l grande isto concorda com $(\sigma)_{\text{max}}$, exceto por um fator 4. A diferença é devida à inevitável presença de efeitos de difração pelos quais a natureza ondulatória da matéria é responsável.

A análise em ondas parciais, expressão (9.23), fornece um procedimento exato para resolver o problema de espalhamento em todas as energias. Dado um potencial $V(r)$, a equação (9.12) deve ser resolvida e suas soluções assintóticas (9.22) usadas para encontrar os desvios de fase δ_l . O número infinito de parcelas de (9.23) não é na prática uma preocupação já que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \delta_l = 0, \quad (9.29)$$

resultado que pode ser verificado se examinarmos a equação (9.12): para grandes valores de l a parcela do potencial centrífugo, proporcional à $l(l+1)$, é totalmente dominante, tornando sem importância os desvios de fase gerados pela parcela $V(r)$. Entretanto, a soma (9.23) terá, em altas energias, a contribuição de muitos termos pois, nesse caso, $kr_0 \gg 1$ e para todos os l até $l_{\max} \simeq kr_0$, haverá um desvio de fase apreciável. A utilidade real da análise em ondas parciais se dá para o caso de baixas energias, que será tratado no parágrafo seguinte.

9.3 - Espalhamento em Baixas Energias

Vimos que a expansão em ondas parciais só é útil em baixas energias porque nesse caso é pequeno o número de parcelas de (9.23) com que temos que lidar. Se a energia for suficientemente baixa, a soma em (9.23) se reduz à parcela de $l = 0$. Temos, nesse caso

$$f(\theta) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \text{sen} \delta_0 \quad (9.30)$$

e

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \text{sen}^2 \delta_0. \quad (9.31)$$

A seção de choque diferencial que resulta de (9.30) independe de θ : o espalhamento é isotrópico. Isso é facilmente compreensível pois em baixas energias o comprimento de onda das partículas do feixe incidente é muito maior do que as dimensões do núcleo alvo; à passagem da onda incidente, todos os pontos do núcleo estão em fase a cada instante e não é mais possível identificar a direção de incidência.

No caso extremo $E \rightarrow 0$ a amplitude de espalhamento (9.30) só se mantém finita se $\delta_0 \rightarrow 0$ juntamente com a energia. Nesse caso, a defasagem deixa de ser o parâmetro importante do espalhamento cedendo lugar ao *comprimento de espalhamento* a , definido pelo limite

$$\lim_{E \rightarrow 0} f(\theta) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{k} = -a, \quad (9.32)$$

ficando a equação

$$\sigma = 4\pi a^2 \quad (9.33)$$

como a expressão da seção de choque total no limite de energia zero.

O significado físico do comprimento de espalhamento pode ser obtido observando-se que para $l = 0$ e no limite $E \rightarrow 0$, a equação (9.12), na região fora do alcance do

potencial, se reduz à sua primeira parcela. Logo, se $d^2u/dr^2 = 0$, vemos que a função de onda u tende a uma reta e a abscissa do ponto onde essa reta corta o eixo r é o comprimento de espalhamento a . Isso se vê facilmente se reescrevermos (9.22) no limite $E \rightarrow 0$:

$$u_0(r) \cong kr + \delta_0 = k(r - a). \quad (9.34)$$

Essa propriedade será usada adiante para determinar se um estado do sistema é ou não ligado.

Como aplicação, vamos fazer o cálculo da seção de choque de espalhamento de nêutrons de baixa energia por prótons. O potencial nuclear de atração entre o próton e o nêutron é posto na forma simples

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0), \end{cases} \quad (9.35)$$

onde r_0 representa o alcance da força nuclear. Esse problema pode, como sabemos, ser reduzido ao problema de uma única partícula portando a massa reduzida do sistema e sujeita ao mesmo potencial V_0 . E passa a ser então a energia total do sistema no centro de massa. Para um nêutron de energia E_n incidindo em um próton em repouso no laboratório, E é muito próximo de $E_n/2$.

Se $l = 0$ é a única onda parcial a contribuir, (9.12) toma a forma

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u = 0 \quad (r < r_0), \quad (9.36a)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}Eu = 0 \quad (r > r_0), \quad (9.36b)$$

com as condições de contorno $u = 0$ em $r = 0$ e u e du/dr contínuas em $r = r_0$. Disso resulta

$$u = A \operatorname{sen} Kr \quad (r < r_0), \quad (9.37)$$

com

$$K = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}, \quad (9.38)$$

e

$$u = \operatorname{sen}(kr + \delta_0) \quad (r > r_0), \quad (9.39)$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (9.40)$$

Note que ambas as soluções são do tipo senoidal porque $E > 0$. A continuidade da função e derivada em $r = r_0$ podem ser expressas pela continuidade de $(du/dr)/u$:

$$K \cotg(Kr_0) = k \cotg(kr_0 + \delta_0) \quad (9.41)$$

ou

$$k \operatorname{tg}(Kr_0) = K \operatorname{tg}(kr_0 + \delta_0), \quad (9.42)$$

que no limite $k \rightarrow 0$ fornece

$$\delta_0 \approx kr_0 \left[\frac{\operatorname{tg}(K_0 r_0)}{K_0 r_0} - 1 \right], \quad (9.43)$$

onde $K_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$. A seção de choque total calculada a partir de (9.43) usando (9.31) apresenta singularidades nos pontos onde $K_0 r_0$ tem valores $\pi/2, 3\pi/2$, etc., pois a tangente no numerador de (9.43) faz a seção de choque divergir. Isso corresponde fisicamente ao aparecimento de um estado ligado àquela profundidade. Como estamos lidando com E muito pequeno, há ocorrência de uma ressonância sempre que o aumento da profundidade do poço faz surgir um novo nível na energia zero. Mas, de fato, a equação (9.43) não é válida para os valores de $K_0 r_0$ acima, que violam a aproximação a partir da qual ela foi deduzida. A equação exata (9.42) mostra que, quando $Kr_0 = \pi/2, 3\pi/2$, etc., o desvio de fase é $\delta_0 = Kr_0$ e de (9.31) vemos que, para esses valores de δ_0 , a seção de choque tem valores muito grandes, mas finitos, dados por

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (9.44)$$

Note que (9.44) pode ser escrita como $\sigma = [4/(kr_0)^2] \pi r_0^2$; como $kr_0 \ll 1$, σ é muito maior que πr_0^2 , que é a seção de choque geométrica do potencial espalhador. Quando σ tem seu valor máximo admissível para espalhamento da onda s , diz-se que a seção de choque está em uma ressonância de onda s . Ressonâncias em outras ondas parciais ocorrem se E é grande o suficiente para que existam desvios de fase grandes para $l > 0$. Por exemplo, quando $\delta_1 = \pi/2, 3\pi/2$, etc., a seção de choque fica particularmente grande e diz-se que temos uma ressonância de onda p .

Outro fato interessante a observar na equação (9.43) é que, se $\operatorname{tg}(K_0 r_0) = K_0 r_0$, o desvio de fase e a seção de choque de espalhamento se anulam. Logo, para certos valores da profundidade do poço, não haverá espalhamento de onda s . Isso é conhecido como *efeito Ramsauer*, devido a ter C. Ramsauer descoberto, em 1921, que a seção de choque efetiva para espalhamento de elétrons por átomos de gases inertes era muito baixa para energias de aproximadamente 0,7 eV. A teoria quântica nos dá uma explicação simples desse efeito, que não é explicado pela teoria clássica. O campo dos átomos de gases inertes decresce mais rapidamente com a distância do que o campo dos outros átomos;

em primeira aproximação, podemos substituir esse campo por um poço retangular e utilizar as equações (9.31) e (9.43) para calcular a seção de choque dos elétrons com baixa energia. Se a energia dos elétrons for aproximadamente 0,7 eV, obtemos que $\sigma \sim 0$, se usarmos r_0 igual às dimensões atômicas.

Façamos uma avaliação da seção de choque nêutron-próton. Usemos para o valor de V_0 a profundidade aproximada do potencial do dêuteron, calculada na seção 2.2 como sendo igual a 34 MeV. Temos

$$K_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mc^2V_0}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{938,93 \times 34}}{197,33} = 0,91 \text{ fm}^{-1}, \quad (9.45)$$

onde m é a massa reduzida do sistema, igual à metade da massa de um núcleon. Usando ainda como raio do dêuteron, $r_0 \cong 2,1$ fm, temos

$$a = -\frac{\delta_0}{k} = r_0 \left[1 - \frac{\text{tg}(K_0 r_0)}{K_0 r_0} \right] = 2,1 \times 10^{-13} \left[1 - \frac{\text{tg}(0,91 \times 2,1)}{0,91 \times 2,1} \right] = 5,2 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (9.46)$$

Logo,

$$\sigma = 4\pi(5,2 \times 10^{-13})^2 \text{ cm}^2 \cong 3,5 \text{ b}. \quad (9.47)$$

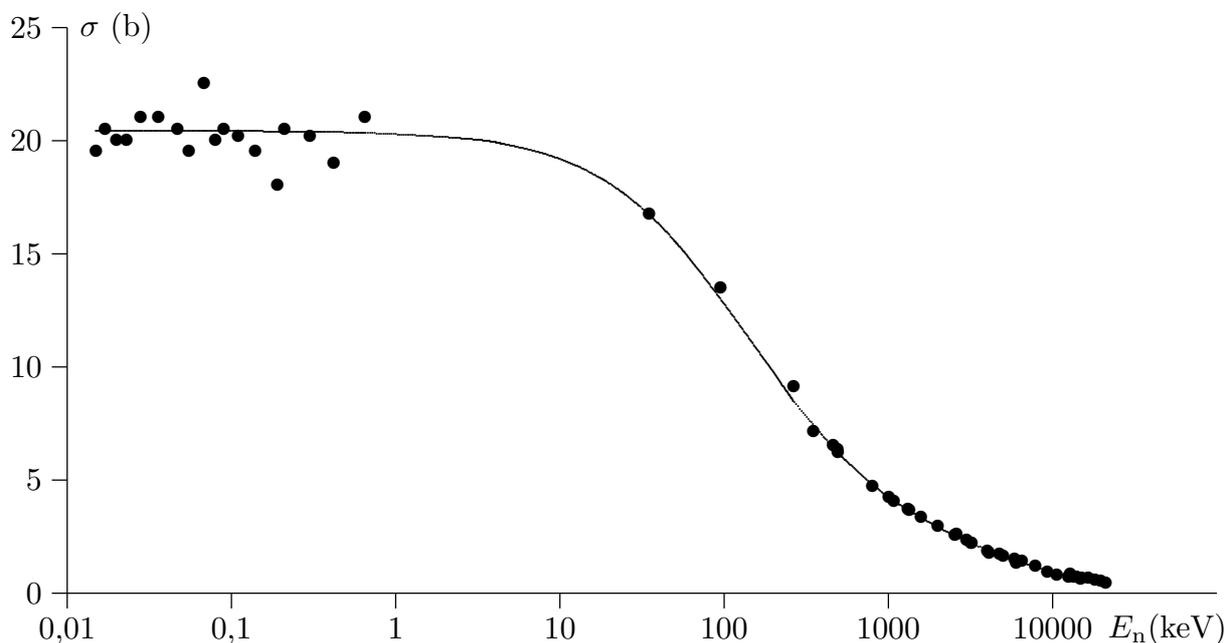


Fig. 9.5 - Valores da seção de choque nêutron-próton a baixas energias. E_n é a energia do nêutron incidente. Os pontos experimentais foram obtidos das referências [Ad50] e [HO71]. A curva foi calculada pela função (9.61).

A figura 9.5 mostra os valores experimentais das seções de choque nêutron-próton até 20 MeV. No limite de energia zero a seção de choque tem o valor estimado $\sigma = (20,43 \pm 0,02)$ b, 6 vezes maior do que o valor por nós calculado. A razão dessa discrepância foi mostrada por Wigner, propondo ser a força nuclear dependente de spin, sendo diferente quando os núcleons colidem com os spins paralelos (triplete) de quando colidem com os spins antiparalelos (singleto). Como há três estados triplete e apenas um singleto, uma experiência em que os núcleons não estejam polarizados registrará três vezes mais eventos do primeiro tipo do que do segundo, resultando para a seção de choque a combinação :

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s. \quad (9.48)$$

Se então $\sigma = 20,4$ b e $\sigma_t = 3,4$ b, resulta para σ_s o valor de 71 b! A explicação para esse alto valor se encontra no fato de o potencial singleto ser mais raso do que o triplete, ficando no limiar do surgimento do primeiro estado ligado. Isso provoca o aparecimento de uma ressonância quando a partícula incidente tem energia muito baixa, como acontece no caso presente.

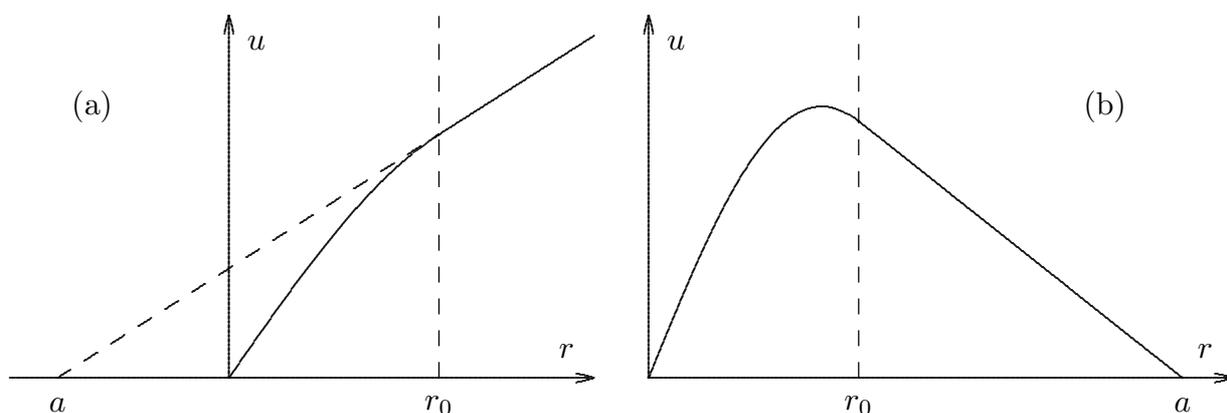


Fig. 9.6 - Parte radial da função de onda de espalhamento u à energia zero para dois valores da profundidade do poço. Em (a) a profundidade não é suficiente para a existência de um estado ligado e o comprimento de espalhamento a é negativo. Em (b) já existe um estado ligado, a função u tem um máximo dentro do alcance do potencial e o valor de a é positivo.

Existem meios de se averiguar se o potencial singleto tem um estado ligado com energia (negativa) muito pequena ou se a ressonância se dá em uma energia positiva bem baixa. Para tanto vamos inicialmente estudar a variação da amplitude de espalhamento em função da profundidade do poço, ainda no caso de energias incidentes E muito pequenas. Quando $V_0 = 0$ a equação (9.12) tem a forma simples $u'' = 0$, com a solução trivial para u sendo uma reta passando pela origem. Quando V_0 vai crescendo e formando o poço a forma da função de onda se assemelha à mostrada na figura 9.6a.

Não há ainda a presença de um estado ligado e o comprimento de espalhamento a é negativo [ver equação (9.34)]. Quando V_0 se torna suficientemente profundo para permitir a existência do primeiro estado ligado, a forma da função de onda é a da figura 9.6b, com um máximo da função se situando dentro do poço. Esse comportamento é esperado: a parte interna da função de onda não deve ser sensível ao fato de E ser ligeiramente positivo ou negativo e uma função de onda de estado ligado deve ter em r_0 uma derivada negativa para se ajustar ao decaimento exponencial da parte externa. O resultado essencial é que o sinal de a é, nesse caso, positivo. Assim, o sinal do comprimento de espalhamento pode nos indicar se uma ressonância ocorre com um estado de energia negativa (ligado) ou positiva (virtual).

A combinação das equações (9.33) e (9.48) fornece

$$\sigma = \pi(3a_t^2 + a_s^2), \quad (9.49)$$

onde a_t e a_s representam os comprimentos de espalhamento para os potenciais tripleto e singleto, ligados às seções de choque respectivas σ_t e σ_s por expressões do tipo (9.33). Para uma equação como (9.49) não importa o sinal das amplitudes de espalhamento, pelo fato de ela traduzir uma combinação *incoerente* dos espalhamentos singleto e tripleto. A seção de choque é proporcional ao quadrado das amplitudes assim como a intensidade de um feixe luminoso é proporcional ao quadrado do módulo do campo elétrico (ou magnético). Uma forma de espalhamento *coerente* é conseguida quando o comprimento de onda das partículas incidentes é da ordem da distância entre os núcleos de uma molécula. No caso da incidência de nêutrons no H_2 , a distância entre os prótons da molécula alvo é cerca de $0,8 \times 10^{-8}$ cm e o espalhamento coerente é conseguido com uma energia dos nêutrons próxima de 2×10^{-3} eV. O espalhamento desses nêutrons muito lentos por uma molécula de hidrogênio produz um fenômeno de interferência semelhante ao que ocorre com ondas luminosas que emergem das duas fendas em uma experiência de Young. Um ingrediente adicional no presente caso é que a molécula de H_2 pode estar em dois estados, um com os spins dos prótons formando um tripleto (ortohidrogênio) e o outro onde os spins formam um singleto (parahidrogênio). Quando um nêutron interage com uma molécula de orto-hidrogênio as duas amplitudes que se adicionam são do mesmo tipo e quando a interação é com o parahidrogênio são de tipo diferente. Schwinger e Teller [ST37] estabeleceram expressões para as seções de choque de espalhamento de nêutrons lentos com o orto e o para-hidrogênio:

$$\sigma = c_1(a_t - a_s)^2 + c_2(3a_t + a_s)^2, \quad (9.50)$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes numéricos, diferentes para os dois tipos de hidrogênio e que também dependem da energia do nêutron incidente e da temperatura do gás. Essa última dependência é natural pois os nêutrons incidentes têm velocidades muito baixas e a agitação térmica das moléculas têm, nesse caso, uma influência não desprezível. Como exemplo, na temperatura de 20,4 K e com nêutrons de energia 0,0045 eV os coeficientes

são, para o orto-hidrogênio, $c_1 = 13,762$ e $c_2 = 6,089$ e para o para-hidrogênio, $c_1 = 0$ e $c_2 = 6,081$. Note que em (9.50), ao contrário de (9.49), os sinais de a_t e a_s são importantes para o cálculo de σ .

A partir de (9.50) é possível se obter os valores dos comprimentos de espalhamento a_t e a_s se as seções de choque forem conhecidas experimentalmente. Medições dessas seções de choque utilizando hidrogênio gasoso foram feitas a partir de 1947 [SH47,SS55], aperfeiçoando trabalhos anteriores feitos em H_2 líquido, onde os efeitos devidos às forças intermoleculares são difíceis de separar. As seções de choque foram medidas desde a temperatura ambiente, onde a proporção é de 75% de orto-hidrogênio e 25% de para-hidrogênio, até 20 K. Nessa última temperatura é possível existir unicamente o para-hidrogênio porque ele tem energia de ligação maior do que o orto-hidrogênio e pode se formar pelo decaimento desse último, desde que o processo seja acelerado por um catalizador (uma substância com átomos paramagnéticos que induz a troca de spin de um dos prótons da molécula de H_2).

Os resultados encontrados para os comprimentos de espalhamento nesses trabalhos experimentais e em outros utilizando métodos diferentes não estão ainda livres de alguns erros sistemáticos. Houk [Ho71] recomenda os valores

$$a_t = (5,423 \pm 0,005) \text{ fm}, \quad a_s = (-23,71 \pm 0,01) \text{ fm} \quad (9.51)$$

como sendo os mais acurados para os comprimentos de espalhamento. Note que esses valores também satisfazem a (9.49). O sinal negativo do comprimento de espalhamento singlete é a resposta à nossa indagação ligada à figura 9.6: o sistema próton-nêutron não tem estado ligado outro que o estado fundamental do dêuteron. A ressonância no espalhamento de nêutrons de baixa energia por prótons se deve a um estado do sistema de energia ligeiramente positiva.

9.4 - Espalhamento com $E_n \lesssim 20$ MeV. Teoria do Alcance Efetivo

Na seção anterior desenvolvemos a teoria do espalhamento elástico para energias próximas de zero, onde as seções de choque são expressas por (9.33). Quando a energia dos nêutrons incidentes começa a se afastar desse limite temos dois problemas a encarar. Primeiro, o limite (9.32) deixa de ser aplicável e o comprimento de espalhamento não pode determinar sozinho a seção de choque. Segundo, a série (9.23) não pode ser truncada em $l = 0$, com as parcelas $l = 1, l = 2, \dots$ começando a ter contribuição significativa. O primeiro problema aparece em energias bem menores do que o segundo que, de fato, só começa a ser importante em energias de algumas dezenas de MeV. Os resultados que obteremos adiante mostram que podemos ir com segurança até a energia de 20 MeV usando somente a onda parcial $l = 0$. O título desta seção tem assim o significado de que a aproximação de energia zero não será mais válida mas nos manteremos ainda restritos à componente $l = 0$ do momento angular.

Nosso objetivo é investigar o comportamento da seção de choque (9.31) quando nos afastamos do limite de energia zero. Os primeiros resultados nesse sentido foram estabelecidos por Schwinger usando um princípio variacional mas foram depois reproduzidos

com um método mais simples que se baseia somente nas propriedades das funções de onda. Seguiremos de perto o trabalho de H. Bethe [Be49], onde esse método é exposto com clareza.

Consideremos o nêutron incidente com energia E_1 e número de ondas k_1 . Escrevendo (9.12) para $l = 0$ e usando (9.40), a função de onda radial satisfaz à equação

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + k_1^2 u_1 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) u_1 = 0. \quad (9.52a)$$

Para uma outra energia E_2 , temos

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + k_2^2 u_2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) u_2 = 0. \quad (9.52b)$$

Multiplicando (9.52a) por u_2 e (9.52b) por u_1 , subtraindo e integrando, ficamos com:

$$u_2 u_1' - u_1 u_2' \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R u_1 u_2 dr, \quad (9.53)$$

onde o limite R é arbitrário.

Definamos agora a função Ψ como sendo a forma assintótica de u , mas válida para todo o espaço:

$$\Psi_1 = \text{sen}(k_1 r + \delta_1) / \text{sen} \delta_1, \quad (9.54)$$

onde a normalização foi escolhida para fazer $\Psi = 1$ na origem; isso determina também a normalização de u . Note que o sub-índice do desvio de fase δ se refere à energia e não ao momento angular.

Uma relação análoga à (9.53) vale para Ψ , isto é:

$$\Psi_2 \Psi_1' - \Psi_1 \Psi_2' \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \Psi_1 \Psi_2 dr. \quad (9.55)$$

Vamos subtrair (9.53) de (9.55). Se R for escolhido fora do alcance das forças nucleares, onde Ψ e u coincidem, a contribuição do primeiro membro no limite R será nula. No limite inferior, $u_1 = u_2 = 0$, e assim esse termo não contribui. Estendendo o limite de integração ao infinito, ficamos com:

$$\Psi_1(0) \Psi_2'(0) - \Psi_2(0) \Psi_1'(0) = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (\Psi_1 \Psi_2 - u_1 u_2) dr. \quad (9.56)$$

As derivadas de (9.56) são obtidas de (9.54), resultando em:

$$k_2 \cotg \delta_2 - k_1 \cotg \delta_1 = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (\Psi_1 \Psi_2 - u_1 u_2) dr. \quad (9.57)$$

Vamos agora aplicar (9.57) ao caso especial $k_1 = 0$. Nesse caso, $k_1 \cotg \delta_1 = -1/a$, onde a é o comprimento de espalhamento. Ignorando o sub-índice 2, (9.57) se reescreve:

$$k \cotg \delta = -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^\infty (\Psi_0 \Psi - u_0 u) dr. \quad (9.58)$$

Nenhuma aproximação foi feita até aqui e a equação (9.58) é exata. Mas, examinando o integrando de (9.58), vemos que ele só é diferente de zero dentro do alcance das forças nucleares; nessa situação, Ψ e u dependem muito suavemente da energia, pois E é suposto pequeno comparado com $V(r)$ [ver equação (9.12)]. Uma aproximação razoável é, portanto, substituir Ψ e u por Ψ_0 e u_0 e escrever:

$$k \cotg \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_{\text{ef}}, \quad (9.59a)$$

com

$$r_{\text{ef}} = 2 \int_0^\infty (\Psi_0^2 - u_0^2) dr. \quad (9.59b)$$

A quantidade r_{ef} tem a dimensão de comprimento, é independente da energia e se denomina *alcance efetivo*. O fator 2 foi incorporado à sua definição para torná-lo próximo do alcance do potencial. Reunindo as equações (9.31) e (9.59) podemos expressar a seção de choque por

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \cotg^2 \delta_0} = \frac{4\pi a^2}{a^2 k^2 + (1 - \frac{1}{2} a r_{\text{ef}} k^2)^2}, \quad (9.60)$$

onde a influência do potencial é representada por dois parâmetros, o alcance efetivo r_{ef} e o comprimento de espalhamento a . A seção de choque não é, assim, sensível a detalhes da forma do potencial pois com qualquer forma razoável deste será sempre possível ajustar a profundidade e o alcance de modo a reproduzir valores dados de a e r_{ef} . O resultado é que, de um estudo do espalhamento de baixa energia não é possível obter informações sobre a forma do potencial núcleon-núcleon. Isso faz com que a teoria do alcance efetivo seja por vezes chamada de *aproximação da independência de forma*.

Para a aplicação da seção de choque (9.60) temos que lembrar que existem de fato dois potenciais, um para o estado singlete e outro para o tripleto e (9.60) deve ser, usando (9.48), mais apropriadamente escrita

$$\sigma = \frac{3}{4} \frac{4\pi a_t^2}{a_t^2 k^2 + (1 - \frac{1}{2} a_t r_{\text{ef}}^t k^2)^2} + \frac{1}{4} \frac{4\pi a_s^2}{a_s^2 k^2 + (1 - \frac{1}{2} a_s r_{\text{ef}}^s k^2)^2}, \quad (9.61)$$

implicando na existência de quatro parâmetros a determinar: a_t , a_s , r_{ef}^t , r_{ef}^s , ou seja, os comprimentos de espalhamento nos estados tripleto e singlete e os respectivos alcances efetivos. Para os dois primeiros temos os valores estabelecidos em (9.51). O alcance efetivo no estado tripleto, r_{ef}^t , pode ser obtido a partir de um dado experimental muito bem conhecido, a energia de ligação do dêuteron. Para tanto, basta reparar que não há restrição em empregar a teoria que acabamos de expor para energias negativas, ou seja, para estados ligados. Vamos então usar para u a função de onda radial do dêuteron e Ψ , nesse caso, é a exponencial decrescente (2.11),

$$\Psi = e^{-\frac{\sqrt{2mE_B}}{\hbar} r}, \quad (9.62)$$

já convenientemente normalizada. E_B é a energia de ligação do dêuteron e m sua massa reduzida. Usando (9.56), com $\Psi_2 = \Psi$ e $\Psi_1 = \Psi_0$, temos:

$$-\frac{\sqrt{2mE_B}}{\hbar} + \frac{1}{a_t} = -\frac{2mE_B}{\hbar^2} \frac{r_{\text{ef}}^t}{2}, \quad (9.63)$$

expressão, que permite obter r_{ef}^t a partir de a_t e E_B . O sinal no segundo membro de (9.63) foi introduzido porque no caso de energia negativa o sinal da segunda parcela de (9.52) deve ser trocado. Usando os valores de (2.1) e (9.51), obtemos o alcance efetivo para o potencial tripleto:

$$r_{\text{ef}}^t = 1,76 \text{ fm}. \quad (9.64)$$

O valor de r_{ef}^s não pode ser obtido como resultado direto de uma experiência e ele é normalmente usado em (9.61) como o parâmetro que melhor reproduz os valores experimentais das seções de choque. O valor

$$r_{\text{ef}}^s = 2,56 \text{ fm}. \quad (9.65)$$

produz seções de choque (9.61) em muito bom acordo com a experiência, como se pode ver na figura 9.5.

9.5 - Espalhamento Próton-Próton

Esse tipo de espalhamento é de tratamento mais difícil que o de nêutron-próton. Com a idéia de deixar claras as origens de algumas dificuldades, descreveremos inicialmente as diferenças essenciais entre os dois tipos de espalhamento.

- 1) No espalhamento p-p há a força coulombiana de repulsão entre os prótons em adição à força nuclear. As forças coulombianas não são de curto alcance: a seção de choque diferencial (fórmula de Rutherford) diverge para ângulos pequenos e a seção de choque total é infinita.
- 2) Quando as partículas são idênticas, o Princípio de Pauli impõe restrições às funções de onda espacial e de spin. Em particular, para baixas energias ($l = 0$), a parte espacial é simétrica e a de spin é, em consequência, antissimétrica. Dessa forma, só o estado singleto contribui para a seção de choque.
- 3) A indistinguibilidade entre os prótons faz com que não seja possível discriminar entre as duas situações mostradas na figura 9.7.

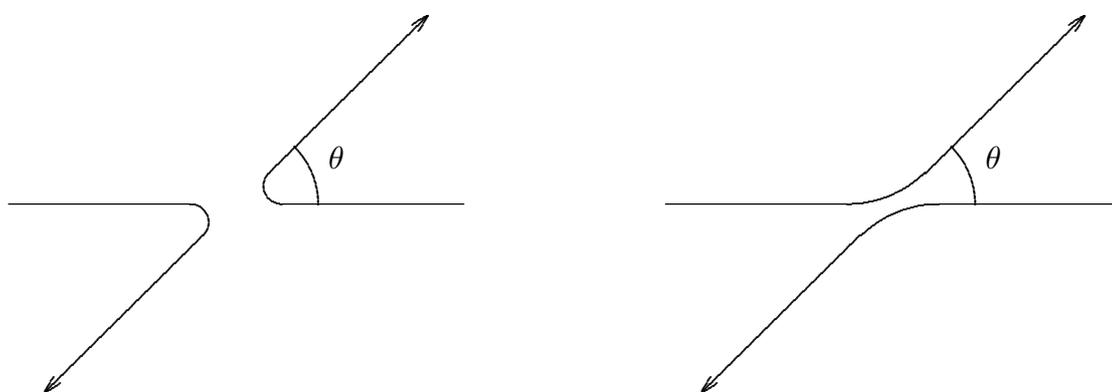


Fig. 9.7 - Duas maneiras possíveis e indistinguíveis de se detectar um próton no ângulo θ após um espalhamento p-p.

A função de onda e a amplitude de espalhamento devem conter contribuições de θ e $\pi - \theta$. No cálculo das seções de choque (quadrado da amplitude de espalhamento) aparecem termos de interferência entre as duas partes. Esse é um fenômeno puramente quântico, sem análogo na física clássica.

- 4) As duas forças independentes que atuam, a força nuclear e a de Coulomb, contribuem com termos próprios para a seção de choque. Mas, o espalhamento nuclear é coerente com o espalhamento coulombiano e um termo de interferência entre os dois efeitos também aparece na seção de choque.

Para atender a todos esses quesitos a seção de choque diferencial (9.6) é composta de várias partes. Sua expressão para a onda s ($l = 0$), que apresentaremos sem demonstração, pode ser escrita como a soma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_c + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_n + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cn} \right]. \quad (9.66a)$$

As duas primeiras parcelas de (9.66a) são de responsabilidade dos potenciais coulombiano e nuclear, respectivamente, e a terceira é o termo de interferência entre ambos. Explicitamente,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_c = \left(\frac{e^2}{2E_p}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)} + \frac{1}{\text{cos}^4(\theta/2)} - \frac{\text{cos}[\eta \ln \tan^2(\theta/2)]}{\text{sen}^2(\theta/2)\text{cos}^2(\theta/2)} \right\}, \quad (9.66b)$$

onde $e^2 = 1,44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, E_p é a energia cinética do próton incidente no sistema do laboratório, supondo o segundo próton em repouso, θ o ângulo de espalhamento no sistema do centro de massa e $\eta = e^2/(\hbar v)$, sendo v a velocidade relativa dos prótons. A primeira parcela de (9.66b) se refere ao espalhamento de Rutherford usual, a segunda é devida à necessidade da existência de um termo em $\pi - \theta$ explicada no ítem 3 acima. A última parcela de (9.66b) é o termo de interferência entre as duas contribuições anteriores, ou seja, entre o espalhamento coulombiano em θ e em $\pi - \theta$. Essa última parcela foi primeiramente estudada por Mott [Mo30] e a partir daí a expressão (9.66b) inteira passou a ser designada como o *espalhamento de Mott*.

O termo de (9.66a) devido ao potencial nuclear tem a forma esperada

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_n = \frac{\text{sen}^2\delta_0}{k^2} \quad (9.66c)$$

e é escrito em função do desvio de fase puramente nuclear δ_0 . Como o espalhamento nuclear é isotrópico, a integração de (9.66c) fornece trivialmente o resultado (9.31).

Resta explicitar o termo de interferência entre o espalhamento coulombiano e nuclear:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cn} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{E_p}\right)^2 \frac{\text{sen} \delta_0}{\eta} \left\{ \frac{\text{cos} [\delta_0 + \eta \ln \text{sen}^2(\theta/2)]}{\text{sen}^2(\theta/2)} + \frac{\text{cos} [\delta_0 + \eta \ln \text{cos}^2(\theta/2)]}{\text{cos}^2(\theta/2)} \right\}. \quad (9.66d)$$

O desvio de fase nuclear δ_0 de (9.66c) e (9.66d) deve ser encontrado pelo melhor ajuste de (9.66a) aos pontos experimentais em cada energia. No exemplo da figura 9.8 obtém-se $\delta_0 = 50,952^\circ$ para $E_p = 3,037 \text{ MeV}$. Vemos ainda na figura que a interferência faz com que a seção de choque global possa ser menor do que a parte puramente nuclear ou coulombiana.

Quando o procedimento acima é repetido para diversas energias obtém-se o gráfico da figura 9.9. Note que o termo de interferência permite que se obtenha o sinal de δ_0 a partir das seções de choque experimentais, o que não é possível com o espalhamento nêutron-próton de baixa energia [ver equação (9.66c)].

No estudo do espalhamento nêutron-próton desenvolvemos a teoria do alcance efetivo, onde os desvios de fase tiveram seu valor vinculado à somente dois parâmetros ligados ao potencial, não dependendo de detalhes sobre a forma do mesmo. A aplicação

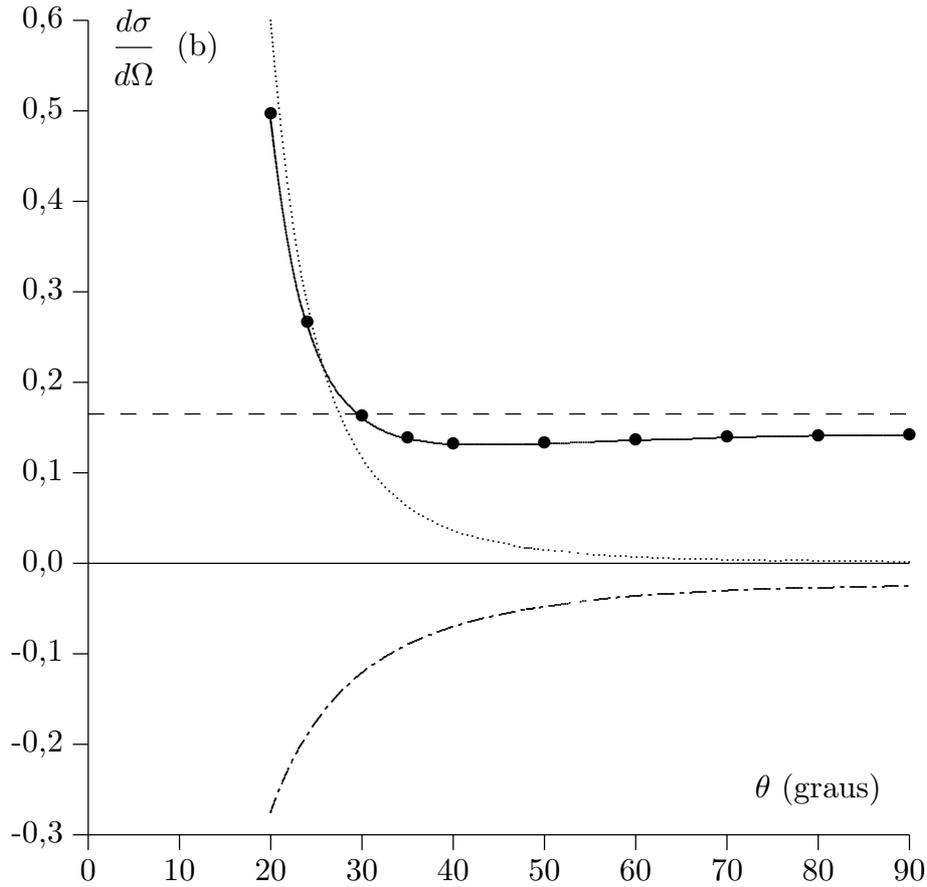


Fig. 9.8 - Composição da seção de choque diferencial de espalhamento próton-próton (curva cheia) pela soma das partes coulombiana (pontilhada), nuclear (tracejada) e pelo termo de interferência (traço-ponto). A energia dos prótons incidentes é de 3,037 MeV. Os pontos experimentais são extraídos da referência [Kn66] e o melhor ajuste à equação (9.66a) se consegue com $\delta_0 = 50,952^\circ$. Devido à simetria em relação a 90° , somente valores até esse ângulo são representados.

de uma teoria independente de forma ao caso do espalhamento próton-próton requer algum cuidado pois o potencial coulombiano tem alcance infinito e mesmo no limite de energia zero a aproximação (9.59) não é mais válida. Ainda assim, uma teoria pode ser desenvolvida para o processo [JB50], resultando em parâmetros que comparáveis ao comprimento de espalhamento e ao alcance efetivo do espalhamento singleto nêutron-próton. Para o espalhamento próton-próton temos:

$$a_s = (-7,82 \pm 0,01) \text{ fm}, \quad r_{\text{ef}}^s = (2,79 \pm 0,02) \text{ fm}. \quad (9.67)$$

O valor absoluto bem menor de a_s agora encontrado não tem grande significado em termos comparativos porque temos a presença da força coulombiana que se soma à força nuclear. Existem meios, no entanto, de subtrair aproximadamente os efeitos dessa

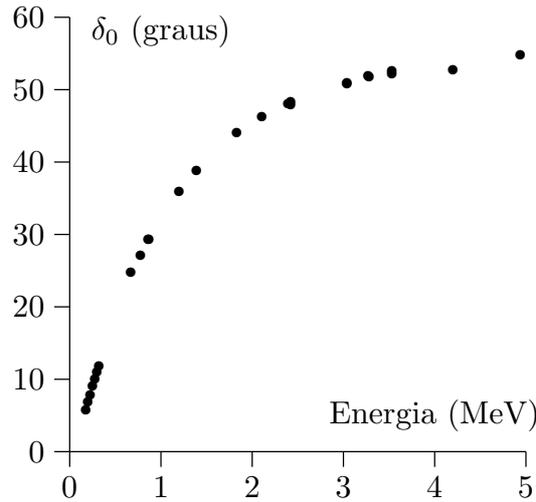


Fig. 9.9 - Variação do desvio de fase em função da energia do próton incidente para a colisão próton-próton. Os pontos experimentais foram coletados da referência [JB50].

força [JB50] e calcular um valor para a amplitude de espalhamento próton-próton como se só existisse a força nuclear. Esse novo valor é $a_s \cong -17$ fm, mais próximo mas ainda diferente do valor correspondente ao espalhamento nêutron-próton ($a_s = -23,71$ fm). Ainda é uma questão aberta se essa diferença é real ou devida a deficiências nos métodos empregados mas, de qualquer forma, um exame da figura 9.6 nos mostra que uma diferença como a encontrada tem pouca repercussão sobre a função de onda. Uma igualdade nos valores dos parâmetros das colisões nêutron-próton e próton-próton sustentaria a hipótese de independência de carga da força nuclear e com os resultados que dispomos podemos afirmar que pelo menos aproximadamente essa hipótese é verdadeira.

9.6 - Espalhamento Nêutron-Nêutron

O espalhamento nêutron-nêutron de baixa energia não apresenta nenhuma dificuldade teórica adicional em relação ao espalhamento nêutron-próton, já que em ambos os casos é a força nuclear a única a atuar. A dificuldade aqui é de caráter experimental pois não se dispõe de um alvo de nêutrons e o estudo da interação deve ser feito indiretamente.

Um dos métodos empregados consiste em analisar o espectro de energia dos prótons resultantes da reação



O espectro é contínuo mas apresenta um pico próximo à energia máxima indicando uma ressonância ligada à formação do estado virtual do di-nêutron e a largura do pico pode dar uma informação sobre o comprimento de espalhamento. Quando se coletam esse e outros resultados de reações com formação de dois nêutrons pode-se extrair os valores médios

$$a_s = (-17,6 \pm 1,5) \text{ fm}, \quad r_{\text{ef}}^s = (3,2 \pm 1,6) \text{ fm} \quad (9.69)$$

para o comprimento de espalhamento e alcance efetivo do espalhamento nêutron-nêutron. Esses valores são mais próximos do espalhamento nuclear próton-próton do que do espalhamento nêutron-próton. Assim, mais forte do que a independência de carga, há a indicação de uma *simetria de carga* da força nuclear.

9.7 - Espalhamento em Altas Energias

Se a energia do núcleon incidente chegar a algumas dezenas de MeV novas modificações no tratamento do espalhamento elástico são necessárias: ondas de $l > 0$ começam a se tornar importantes e a seção de choque diferencial, de acordo com (9.8) e (9.23), será determinada pela interferência das ondas de diferentes valores de l . Se, por exemplo, as ondas de $l = 0$ e $l = 1$ participam do espalhamento, então

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left[\text{sen}^2 \delta_0 + 6 \text{sen} \delta_0 \text{sen} \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \cos \theta + 9 \text{sen}^2 \delta_1 \cos^2 \theta \right]. \quad (9.70)$$

Conseqüentemente, a interferência das ondas s e p espalhadas conduz a uma quebra de simetria do espalhamento em torno do ângulo $\theta = 90^\circ$, que existiria se cada onda espalhasse independentemente.

Até uma energia próxima de 270 MeV o espalhamento elástico é o único processo a ocorrer em uma colisão núcleon-núcleon. Os núcleons não possuem estados de excitação a baixas energias e a interação fraca é muito lenta para se manifestar em um processo de espalhamento. A figura 9.10 ilustra o comportamento da seção de choque total próton-próton em função da energia. A queda suave desde a energia zero é interrompida por volta de 270 MeV (135 MeV no centro de massa), valor que marca o limiar para a criação de píons. Com o início da contribuição desses processos inelásticos a seção de choque total se separa da elástica.

9.8 - Sistema do Laboratório - Sistema do Centro de Massa

A título de complementação do estudo do espalhamento elástico veremos nesta seção como a mudança do sistema de referência afeta as grandezas relacionadas ao espalhamento, especialmente ângulos e distribuições angulares.

O centro de massa de um sistema de partículas é definido pelo vetor

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \quad (9.71)$$

e se move com a velocidade

$$\mathbf{v}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i}. \quad (9.72)$$

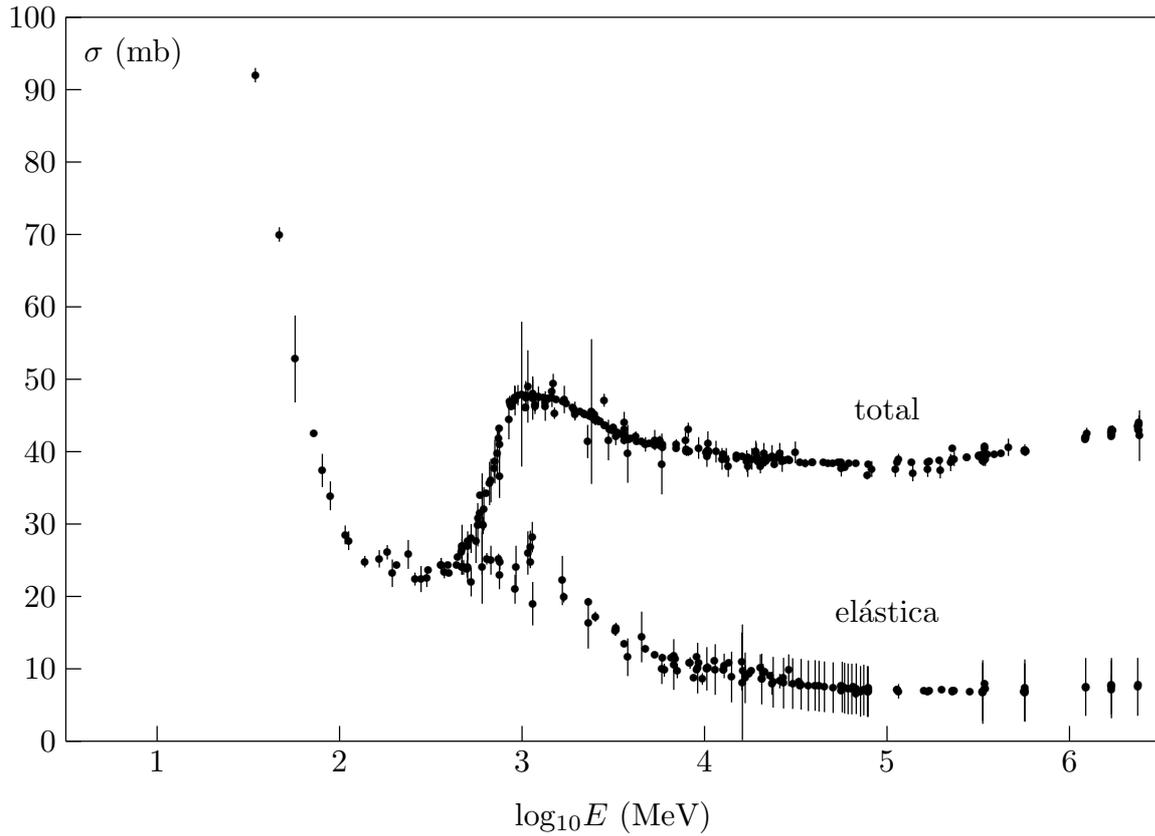


Fig. 9.10 - Seção de choque próton-próton total e de espalhamento elástico em função da energia no laboratório [Ba96].

No caso especial de 2 partículas e com a segunda em repouso, a velocidade do centro de massa tem a expressão simples:

$$V_c = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2} = V \frac{m_R}{m_2}, \quad (9.73)$$

onde V é a velocidade da partícula 1 e m_R a massa reduzida do sistema, definida por

$$m_R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.74)$$

A figura 9.11 mostra essa colisão vista por um observador situado no centro de massa. Observe que, computado no centro de massa, o momento linear total é sempre nulo. Essa propriedade pode ser utilizada para tornar mais fácil o cálculo do balanço energético de uma reação. No capítulo 10 retornaremos à discussão desse tema. Do ponto de vista do laboratório, às velocidades da figura 9.11 deve ser adicionada vetorialmente a velocidade do centro de massa. O resultado é visto na figura 9.12: θ e ϕ são os ângulos de

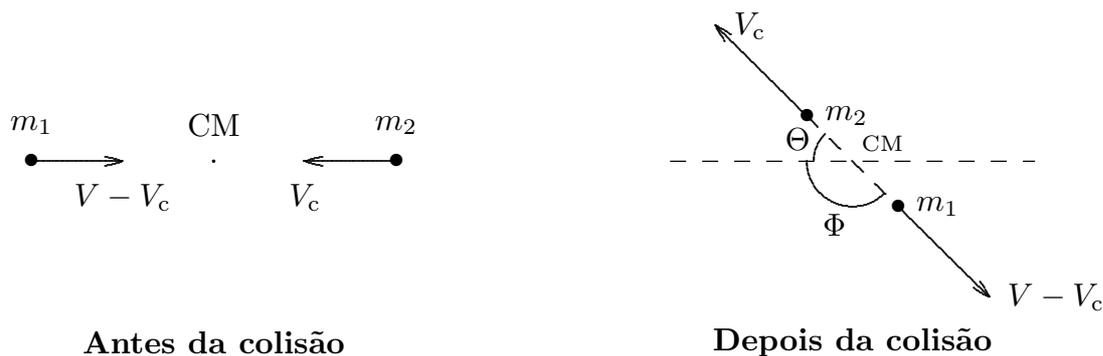


Fig. 9.11 - Colisão vista por um observador situado no centro de massa.

emergência das partículas 1 e 2 (esta última inicialmente em repouso), respectivamente. O triângulo ABC é isósceles; logo, $\Phi - \phi = \phi$ e, assim,

$$\phi = \frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta), \quad (9.75)$$

relações que independem de m_1 e m_2 . No triângulo CDE,

$$\cotg \theta = \frac{CD}{DE} = \frac{V_c + (V - V_c) \cos \Theta}{(V - V_c) \sin \Theta} = \frac{\frac{V_c}{V - V_c} + \cos \Theta}{\sin \Theta} = \frac{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Theta}{\sin \Theta};$$

logo:

$$\cotg \theta = \frac{m_1}{m_2} \operatorname{cosec} \Theta + \cotg \Theta. \quad (9.76)$$

As relações (9.75) e (9.76) definem a passagem de ângulos de um sistema para o outro.

As seções de choque diferenciais $\sigma(\theta)$ e $\sigma(\Theta)$ podem também ser relacionadas. Para tanto, devemos ter em mente que, se ω e Ω são os ângulos sólidos associados a θ e Θ , respectivamente, então, $\sigma(\theta)d\omega = \sigma(\Theta)d\Omega$, pois as partículas detectadas são as mesmas em ambos os casos [ver a definição (9.6)]. Desse modo,

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\Theta)} = \frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{2\pi \sin \Theta d\Theta}{2\pi \sin \theta d\theta}. \quad (9.77)$$

Usando agora (9.76) para obter $d\Theta/d\theta$, obtemos a relação procurada:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\Theta)} = \frac{\sin^3 \Theta}{\sin^3 \theta} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \Theta} \right). \quad (9.78)$$

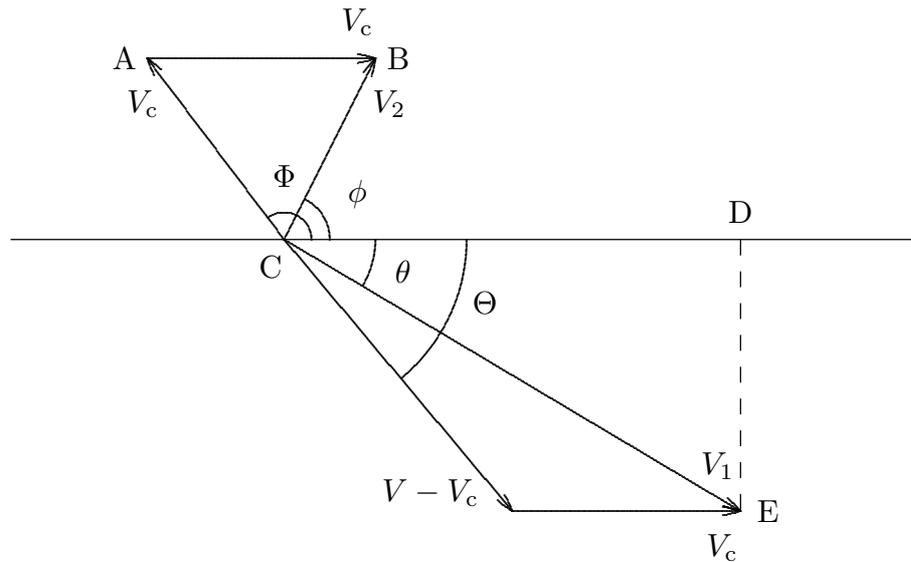


Fig. 9.12 - Passagem das velocidades no centro de massa para o laboratório.

Sugestões para Leitura

- J. L. Powell e B. Crasemann, "Quantum Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961, cap. 8.
- C. J. Joachain, "Quantum Collision Theory", North-Holland, Amsterdam, 1975, cap. 4.
- A. Messiah, "Quantum Mechanics", North-Holland, Amsterdam, 1961, cap. 10.
- E. Merzbacher, "Quantum Mechanics", Wiley, New York, 1970, cap. 19.

Exercícios

- 1 - Prove que se $S_l(k)$ tem a forma (9.20), a função de onda (9.19) descreve um espalhamento elástico. Sugestão: mostre que o fluxo do vetor corrente de probabilidade através de uma esfera que envolve o centro espalhador é nulo.
- 2 - Demonstre a relação (9.23), usando (9.2), (9.18) e (9.19).
- 3 - Demonstre a relação (9.24), usando as equações (9.23) e

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}.$$

- 4 - Utilize o método de ondas parciais para calcular $d\sigma/d\Omega$ e σ para o espalhamento de esferas duras com $kR = 0.1$, considerando somente ondas s, e também com $kR = 0.5$,

considerando somente ondas s e p. Faça um gráfico de $d\sigma/d\Omega$ obtidos em ambos os cálculos.

Obs: Para $r > R$ é necessário utilizar a solução geral da equação diferencial para $u_l(kr)$. Esta solução é $A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)$, onde cada $n_l(kr)$ pode ser gerado pelo $j_l(kr)$ correspondente pela troca de *cos* por *sen*, e de *sen* por $-\cos$, nas expressões de $j_l(kr)$.

5 - Ache a seção de choque para partículas de baixa energia incidindo no potencial de “esfera dura”

$$V(r) = \infty \quad r < R$$

$$V(r) = 0 \quad r > R$$

6 - Nêutrons de baixa energia são espalhados por prótons. Sejam θ e ϕ os ângulos de emergência dos nêutrons e prótons, respectivamente. a) Mostre que, para um dado evento, $\theta + \phi = 90^\circ$. b) O espalhamento é isotrópico no centro de massa e a equação (9.48) mostra que a distribuição angular dos nêutrons no sistema do laboratório é dada por $\sigma(\theta) = 4 \cos \theta \sigma(\Theta)$. Mostre que para os prótons vale a relação $\sigma(\phi) = 4 \cos \phi \sigma(\Phi)$. c) Sendo $\sigma(\Theta)$ e $\sigma(\Phi)$ constantes, as funções $\sigma(\theta)$ e $\sigma(\phi)$ têm máximos em 0° . Como se harmoniza esse resultado com o estipulado no item (a)?

7 - Diga porque não é possível a um próton em repouso espalhar outro próton, de baixa energia, que tenha spin de mesmo sentido que o dele.

8 - Um nêutron de energia cinética E_1 é espalhado elasticamente por um núcleo de massa M , ficando com uma energia cinética final E_2 . a) Sendo Θ o ângulo de espalhamento no sistema do centro de massa, mostre que

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2} [(1 + \alpha) - (1 - \alpha) \cos \Theta],$$

sendo $\alpha = [(M - 1)/(M + 1)]^2$. b) Qual é a perda máxima de energia cinética em função de E_1 e M ? Para que ângulo Θ ela ocorre? Que ângulo θ no laboratório corresponde a esse valor de Θ ?

10 - REAÇÕES NUCLEARES

10.1 - Introdução

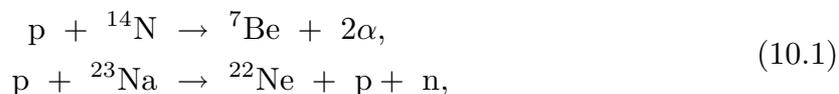
O processo de colisão de dois núcleos pode dar lugar a uma reação nuclear onde, à semelhança de uma reação química, os produtos finais sejam diferentes dos iniciais. Esse processo ocorre quando um alvo é bombardeado por partículas provenientes de um acelerador ou de uma substância radioativa e foi dessa última forma que Rutherford observou, em 1919, a primeira reação nuclear produzida em laboratório,



fazendo incidir partículas- α provenientes de uma amostra de ${}^{214}\text{Bi}$ sobre nitrogênio contido em um recipiente.

Assim como (1.1), outras reações foram induzidas com o emprego de partículas- α , o único projétil disponível inicialmente. Com o desenvolvimento dos aceleradores, a partir de 1930, as possibilidades se multiplicaram, tanto na energia quanto na massa do projétil; já é possível bombardear um alvo com prótons de 500 GeV e feixes de partículas tão pesadas quanto o urânio estão disponíveis para estudo de reações com íons pesados.

Podemos algumas vezes ter mais de dois produtos finais em uma reação, como nos exemplos



ou apenas um, como na reação de captura



onde o asterisco indica ter ficado o Si em um estado excitado, que normalmente decai emitindo radiação- γ . Em circunstâncias especiais, mais de dois reagentes são admissíveis. Assim, por exemplo, a reação



pode ter lugar no plasma superaquecido do interior das estrelas.

Os produtos finais podem, ainda, ser idênticos aos iniciais. Esse caso caracteriza um processo de espalhamento nuclear, que pode ser elástico, como no exemplo simples

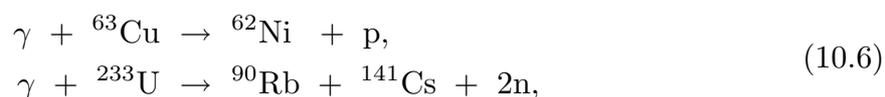


onde só há transferência de energia cinética entre projétil e alvo, ou inelástico, como no exemplo



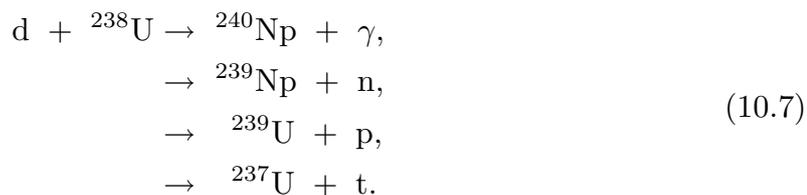
onde parte da energia cinética do sistema é gasta na excitação do ${}^{16}\text{O}$.

As reações nucleares não estão, naturalmente, limitadas a núcleons, podendo envolver todo tipo de partícula, e também radiação. Assim, as reações



são exemplos de processos nucleares induzidos por radiação gama. Na primeira um raio gama arranca um próton do ${}^{63}\text{Cu}$ e na segunda induz o processo de fissão nuclear no ${}^{233}\text{U}$, com a produção de dois fragmentos e a liberação de dois nêutrons.

É essencial destacar ainda que, ao contrário de uma reação química, os produtos resultantes de uma reação nuclear não ficam determinados univocamente: a partir de dois ou mais reagentes podem existir dezenas de possibilidades de composição dos produtos finais com um número ilimitado de estados quânticos disponíveis. Como exemplo, a colisão de um dêuteron com um núcleo de ${}^{238}\text{U}$ pode dar lugar, entre outras, às seguintes reações :



Na primeira delas o dêuteron é absorvido pelo urânio, formando um núcleo excitado de ${}^{240}\text{Np}$, que se desexcita emitindo um gama. As duas seguintes se enquadram nas chamadas *reações de stripping*, onde um núcleon é transferido do projétil para o alvo. A última exemplifica o processo inverso: o dêuteron captura um nêutron do alvo e emerge da reação como um ${}^3\text{H}$ (trício). Ela é denominada, por esse motivo, de uma *reação de pick-up*. Outra possibilidade seria, na primeira reação, o núcleo ${}^{240}\text{Np}$ fissionar ao invés de emitir o raio gama, contribuindo esse fenômeno com dezenas de possíveis produtos finais para a reação.

Cada uma das vias em que uma reação pode se processar levando a determinados produtos com estados quânticos bem definidos se denomina um *canal*. Em (10.7) para o *canal de entrada* $d + {}^{238}\text{U}$ são representados quatro dos possíveis *canais de saída*. Note que um canal de saída diferente seria atingido se algum dos produtos finais estivesse em um estado excitado. A probabilidade de uma reação nuclear ter lugar através de um determinado canal de saída depende da energia da partícula incidente e é medida pela seção de choque para aquele canal. A teoria das reações nucleares deve, ao lado de

elucidar os mecanismos que determinam a ocorrência dos diferentes processos, avaliar as seções de choque correspondentes aos diversos canais de saída.

Além dos constituintes iniciais e finais, seria importante discutir os processos através dos quais uma reação nuclear pode ter lugar. Nesse aspecto, são importantes dois mecanismos de atuação oposta: nas *reações diretas* o projétil e o alvo têm uma interação de curta duração, podendo haver troca de energia ou de partículas entre eles. No outro mecanismo há uma fusão do projétil com o alvo, a energia disponível sendo distribuída a todos os núcleons, formando um núcleo composto altamente excitado. Desse núcleo composto surgem os produtos finais da reação. Esses mecanismos serão detalhados em seções próximas.

10.2 - Leis de Conservação

Diversas leis de conservação contribuem para restringir os possíveis processos que tem lugar quando se bombardeia um alvo com um dado projétil, algumas delas já tendo sido comentadas no capítulo 1.

- 1) Número bariônico - Não há ainda evidência experimental de processos em que sejam criados ou destruídos núcleons sem a criação ou destruição dos antinúcleons correspondentes. Esse fato foi exposto no capítulo 1 quando da definição do número bariônico B . A aplicação desse princípio às reações de baixa energia é ainda mais restritiva. Antes do limiar da produção de mésons (~ 140 MeV), nenhum processo ligado às forças nucleares é capaz de transformar um próton em um nêutron e vice-versa, e processos regidos pela força fraca (responsável pela emissão- β dos núcleos) são muito lentos em relação aos tempos consumidos em reações nucleares ($\sim 10^{-22}$ a 10^{-16} s). Desse modo, podemos falar em uma conservação de prótons e nêutrons separadamente, que devem assim aparecer em quantidades iguais nos dois lados de uma reação nuclear.
- 2) Carga - Esse é um princípio de conservação geral na física, válido em qualquer circunstância. Nas reações puramente nucleares ele é computado fazendo a soma dos números atômicos, que deve ser idêntica, de um e de outro lado da reação.
- 3) Massa-Energia e Momento Linear - Esses são dois dos princípios mais aplicados no estudo da cinemática das reações. Através deles, ângulos e velocidades finais são relacionados aos parâmetros iniciais do problema.
- 4) Momento angular total - É sempre uma constante de movimento. Na reação



por exemplo, o ${}^{10}\text{B}$ tem $I = 3$ no estado fundamental, ao passo que a partícula- α tem momento angular nulo. Se a captura se faz em uma onda-s ($l_i = 0$), o núcleo composto intermediário fica em um estado com $I_c = 3$. Ambos os produtos finais tem momento angular igual a $1/2$, logo a soma vetorial é 0 ou 1. O momento angular relativo dos produtos finais será, pois, $l_f = 2, 3$ ou 4.

- 5) Paridade - Sempre se conserva em reações regidas pela força nuclear. No exemplo anterior, o ^{10}B , o ^4He e o próton têm paridade par, ao passo que o ^{13}C tem paridade ímpar. Logo, se $l_i = 0$, temos necessariamente $l_f = 3$. Assim, o momento orbital final dos produtos de (10.8) fica determinado pela conservação conjunta do momento angular total e da paridade.
- 6) Isospin - Essa é uma lei de conservação aproximada que se aplica a núcleos leves, onde o efeito da força coulombiana é pequeno. Uma reação nuclear envolvendo esses núcleos não só conserva a componente-3 do isospin (consequência da conservação de carga e do número bariônico) mas também o isospin total \mathbf{T} . Reações que populam estados excitados não conservando o valor de \mathbf{T} são fortemente inibidas. Um exemplo muito citado é o da reação $d + ^{16}\text{O} \rightarrow \alpha + ^{14}\text{N}$, onde o estado excitado 0^+ de 2,31 MeV do ^{14}N é cerca de cem vezes menos populado que o estado fundamental 1^+ . Conservação de energia, momento angular e paridade não impõem qualquer proibição para aquele canal, cuja baixa ocorrência só pode ser justificada pela conservação de isospin: os estados fundamentais dos quatro núcleos participantes da reação têm todos $\mathbf{T} = 0$ e o estado 1^+ do ^{14}N tem $\mathbf{T} = 1$.

10.3 - Cinemática das Reações Nucleares

Estudaremos a cinemática de uma reação típica, onde o projétil a e o alvo A dão lugar a dois produtos, b e B , respectivamente. Isso pode ser expresso na notação que usamos até aqui



ou em uma notação mais compacta, também muito empregada



A figura 10.1 mostra os parâmetros ligados à reação (10.9).

Na situação mais comum a e b são núcleos leves e A e B , pesados; o núcleo b tem seu ângulo de emergência θ e sua energia registrados no sistema do laboratório e o núcleo de recuo B tem curto alcance e não chega a sair do alvo. Podemos, então, por conveniência, eliminar os parâmetros de B do sistema de equações que traduzem a conservação de energia e momento:

$$\begin{aligned} E_a + Q &= E_b + E_B \\ \sqrt{2m_a E_a} &= \sqrt{2m_b E_b} \cos \theta + \sqrt{2m_B E_B} \cos \phi \\ \sqrt{2m_b E_b} \sin \theta &= \sqrt{2m_B E_B} \sin \phi, \end{aligned} \quad (10.11)$$

onde o Q da reação mede a energia ganha (ou perdida) devido à diferença entre as massas iniciais e finais:

$$Q = (m_a + m_A - m_b - m_B)c^2. \quad (10.12)$$

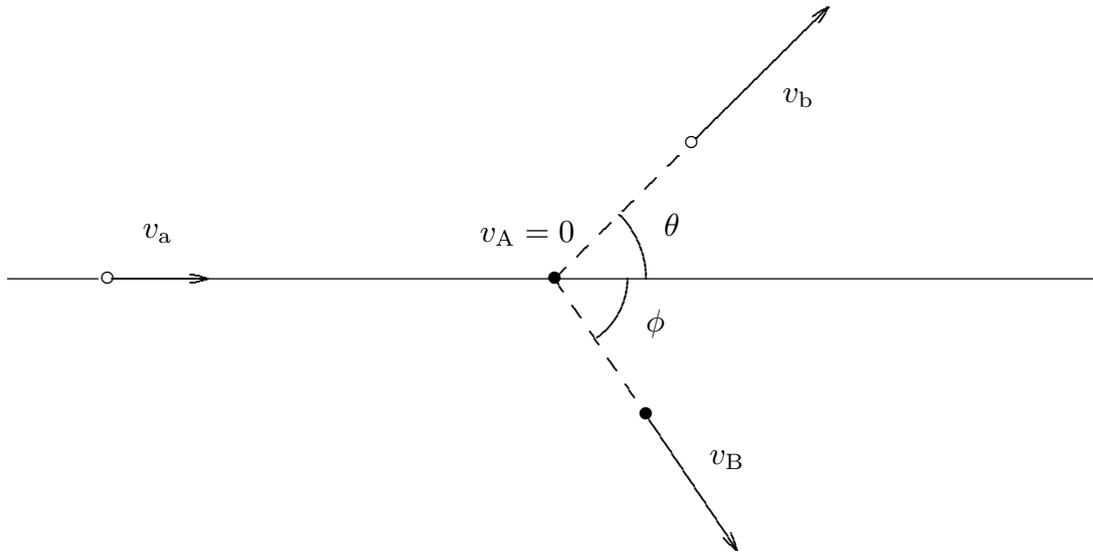


Fig. 10.1 - Reação nuclear $a+A \rightarrow b+B$ vista no sistema do laboratório.

Eliminando E_B e ϕ de (10.11) podemos relacionar Q aos parâmetros da colisão que nos interessam:

$$Q = E_b \left(1 + \frac{m_b}{m_B} \right) - E_a \left(1 - \frac{m_a}{m_B} \right) - \frac{2}{m_B} \sqrt{m_a m_b E_a E_b} \cos \theta. \quad (10.13)$$

Relação mais útil para a análise de uma reação nuclear é obtida observando-se que (10.13) é uma equação do segundo grau em $\sqrt{E_b}$, cuja solução é:

$$\sqrt{E_b} = \frac{1}{m_b + m_B} \left\{ \sqrt{m_a m_b E_a} \cos \theta \pm \sqrt{m_a m_b E_a \cos^2 \theta + (m_b + m_B)[E_a(m_B - m_a) + Q m_B]} \right\}. \quad (10.14)$$

Se colocarmos em um gráfico a energia E_b da partícula emergente, observada no ângulo θ , em função da energia E_a da partícula incidente, vamos obter uma série de curvas, uma para cada valor de θ . A figura 10.2 mostra as curvas obtidas para a reação $^{12}\text{C} + ^{14}\text{N} \rightarrow ^{10}\text{B} + ^{16}\text{O}$, onde $Q = -4,4506$ MeV.

Duas coisas ficam evidentes ao se observar a figura 10.2. Em primeiro lugar, como Q é negativo para essa reação, existe uma energia limiar para a partícula incidente, E_l , função do ângulo θ , abaixo da qual não são observados núcleos b naquele ângulo. Nessas energias o discriminante de (10.14) se anula, e essa condição fornece:

$$E_l = \frac{-Q m_B (m_B + m_b)}{m_a m_b \cos^2 \theta + (m_B + m_b)(m_B - m_a)}. \quad (10.15)$$

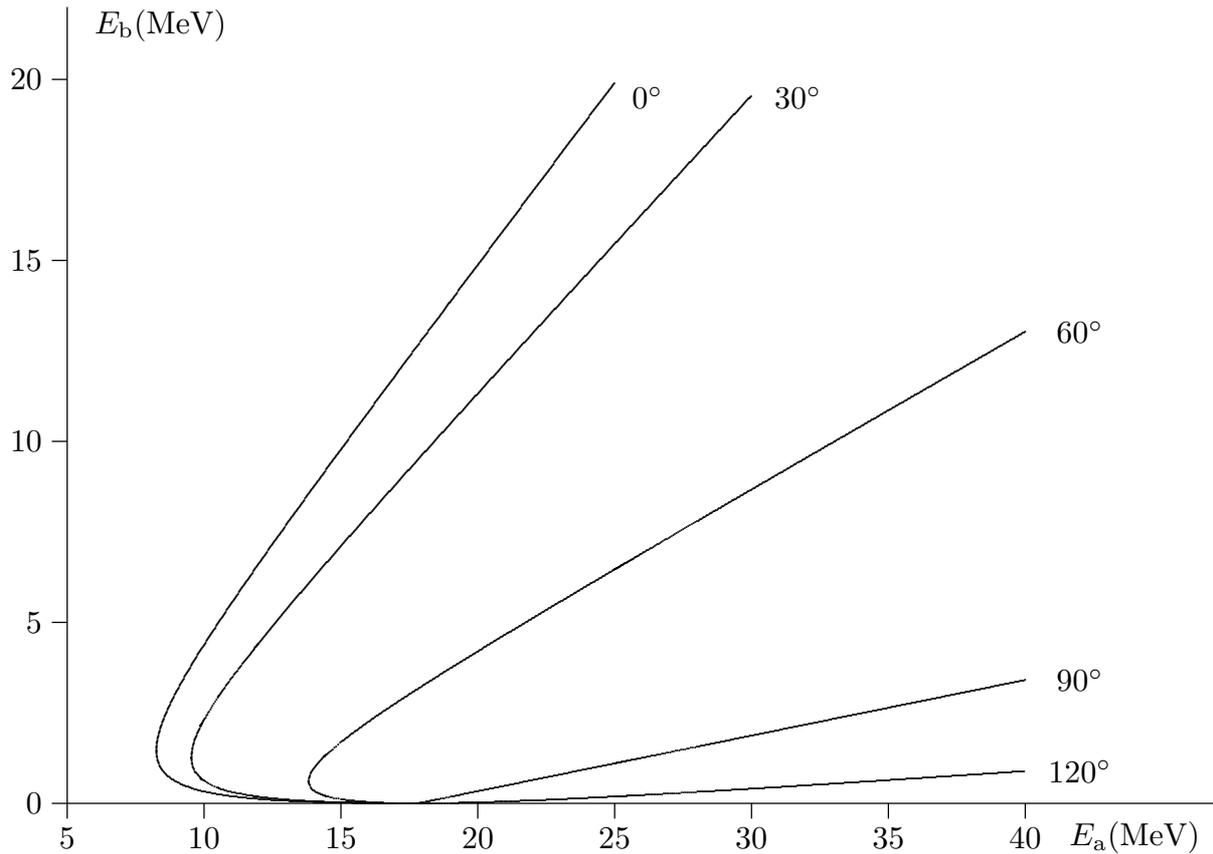


Fig. 10.2 - Energia E_b dos núcleos de boro na reação $^{12}\text{C} + ^{14}\text{N} \rightarrow ^{10}\text{B} + ^{16}\text{O}$, em função da energia E_a dos núcleos de ^{12}C incidentes, para diversos ângulos de espalhamento.

Esses limiares são devidos apenas à força nuclear, podendo ser menores quando se leva em conta a repulsão coulombiana.

O menor valor de E_l em (10.15),

$$E_l = \frac{-Q(m_B + m_b)}{m_B + m_b - m_a}, \quad (10.16)$$

ocorre para $\theta = 0$, e é o limiar absoluto da reação, ou seja, o menor valor da energia incidente E_a para o qual a reação pode ocorrer. Se $Q > 0$ (reações exoérgicas) o limiar é negativo e a reação se processa com qualquer energia incidente. Se $Q < 0$ (reações endoérgicas), uma energia incidente $E_a = E_l$ começa a produzir eventos em $\theta = 0^\circ$. Com o aumento de E_a a partir de E_l , outros ângulos se tornam acessíveis.

A segunda observação importante a ser feita na figura 10.2 diz respeito à relação unívoca entre E_b e E_a . Para cada energia E_a existe um único valor de E_b para cada ângulo θ , exceto na região de energia entre 8,26 MeV e 17,82 MeV. O primeiro número corresponde à energia limiar (10.16). O segundo pode ser determinado igualando a zero

o numerador de (10.14); isso fornece

$$E'_a = \frac{-m_B Q}{m_B - m_a}, \quad (10.17)$$

valor independente do ângulo θ . Desse modo, as curvas para todos os ângulos θ cortam o eixo horizontal no mesmo ponto.

A região de valores duplos de E_b só existe para reações endoérgicas; quando $Q > 0$ a correspondência entre E_b e E_a é bi-unívoca em todas as energias, para qualquer valor de θ . Isso é consequência clara de (10.17) e é ilustrado na figura 10.3, onde a reação inversa à da figura 10.2 é plotada.

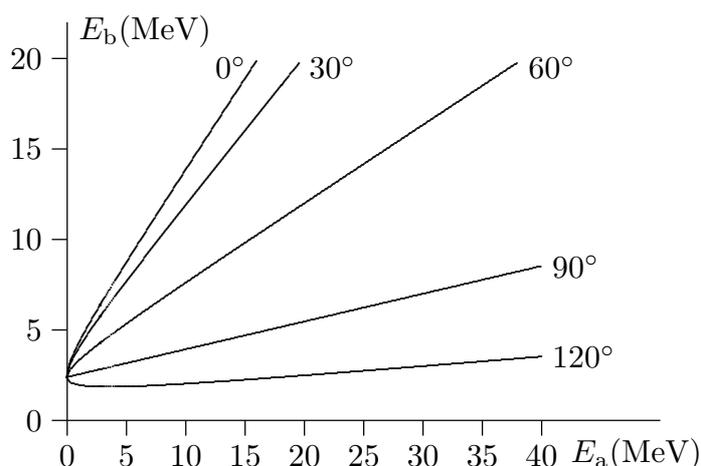


Fig. 10.3 - Energia do núcleo de ^{12}C emergente da reação $^{10}\text{B} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{14}\text{N}$.

Vê-se também por (10.15) e (10.17) que a faixa de energia onde ocorrem valores duplos de E_b é mais larga quando os participantes da reação tem massas comparáveis.

Convém observar, ainda, que somente valores de θ entre 0° e 90° admitem uma região de dupla solução para a energia; para $\theta > 90^\circ$ a primeira parcela de (10.14) é negativa e não é possível haver mais do que um valor de E_b .

Para encerrar esta seção vamos entender como é vista uma reação por um observador situado no sistema do centro de massa (SCM). Um dado essencial é o valor da energia disponível no SCM pois o momento total naquele sistema é nulo antes e depois da reação. Assim, a energia limiar de uma reação endoérgica é igual ao próprio valor de Q , o que não ocorre se for computada no sistema do laboratório (SL) pois, neste, parte da energia inicial é destinada à conservação do momento.

Supondo ainda o alvo b em repouso no SL, a energia ϵ_i disponível inicialmente no SCM é dada pela soma das energias dos dois núcleos. Com o auxílio de (9.72) e (9.74), obtemos:

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} m_a v_a^2 \left(1 - \frac{m_a}{m_a + m_A} \right)^2 + \frac{1}{2} m_A v_a^2 \left(\frac{m_a}{m_a + m_A} \right)^2 = E_a \frac{m_R}{m_a}. \quad (10.18)$$

A energia cinética final é dada, naturalmente, por:

$$\epsilon_f = \epsilon_i + Q, \quad (10.19)$$

pois Q mede exatamente a energia ganha com o rearranjo promovido pela reação. Usando (10.18) em (10.19),

$$\epsilon_f = E_a \frac{m_R}{m_a} + Q. \quad (10.20)$$

Se E_a é igual à energia limiar (10.16), a energia final no SCM se escreve:

$$\epsilon_f = -Q \frac{m_a + m_A - Q/c^2}{m_A - Q/c^2} \frac{m_A}{m_a + m_A} + Q \cong 0 \quad (10.21)$$

onde se fez uso de (10.12). A quantidade Q/c^2 foi desprezada no resultado final de (10.21) por ser pequena comparada com as massas envolvidas. O resultado mostra que, no limiar, as partículas têm energia cinética final nula no SCM. Toda a energia cinética inicial foi consumida para suprir o ganho de massa, ou seja, o valor de Q da reação. A energia final (10.21) não é rigorosamente nula porque o sistema (10.11) e as equações que dele derivam não foram escritos de uma forma relativisticamente correta. Quando isso é feito [Mi67], (10.16) deve ser substituída por

$$T_l = \frac{-Q[2(m_a + m_A)c^2 - Q]}{2m_A c^2}, \quad (10.22)$$

que produz o resultado exato $\epsilon_f = 0$ quando, na passagem do SL para o SCM, se usam as transformações relativísticas adequadas (ver exercício 10.4).

A análise da colisão no SCM serve também para entender fisicamente a possibilidade de dois valores da energia E_b em um dado ângulo para uma única energia incidente E_a . No SCM, para um dado valor de E_a corresponde um único valor de E_b que atende à conservação do momento total nulo e da energia. Partículas com energia E_b vão ser detectadas em todos os ângulos e isso dá ensejo ao aparecimento de duplicidade de energia no SL. O diagrama de velocidades da figura 10.4 ilustra como isso ocorre.

É fácil também entender pelo diagrama porque a duplicidade de energias se restringe a ângulos menores do que 90° . Também não é difícil ver que o fenômeno desaparece para um certo valor limite da energia da partícula incidente. (ver exercício 10.5)

10.4 - Seções de Choque de Espalhamento e Reação

Quando um feixe de partículas, representado quanticamente por uma onda plana, incide sobre um núcleo, podemos ter, como vimos em seções anteriores, processos bem mais complexos do que o simples espalhamento da onda, como descrito no capítulo 9

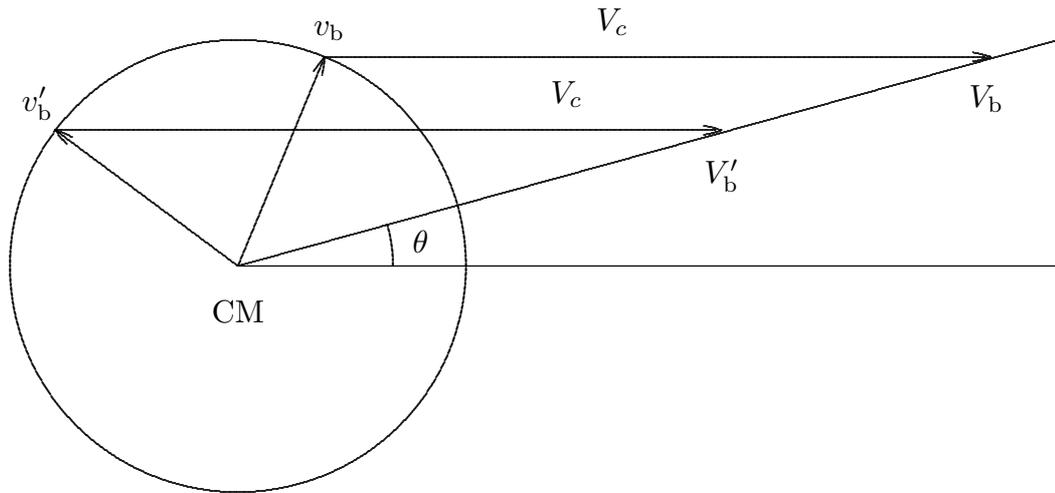


Fig. 10.4 - Diagrama de velocidades, mostrando como a partir de duas diferentes velocidades v_b e v'_b no SCM se pode chegar à velocidades correspondentes V_b e V'_b no SL de mesmo suporte, dando ensejo a que em um mesmo ângulo θ sejam observadas partículas com energias diferentes. V_c é a velocidade do SL no SCM.

para o caso núcleon-núcleon. Para estabelecer de que forma se pode calcular a seção de choque para esses processos, vamos reexaminar alguns dos conceitos estudados na seção 9.1.

A onda plana incidente foi escrita assintoticamente [equação (9.18)] como uma soma de ondas esféricas incidentes e emergentes. A expressão (9.19) mostra que a função de onda é modificada pela presença de um potencial espalhador $V(r)$, responsável pelo aparecimento de uma fase na parte emergente da onda. Vimos, entretanto, que o espalhamento elástico é apenas um dos canais pelos quais a reação pode se processar e o denominamos *canal elástico*. O espalhamento inelástico e todos os demais canais se agrupam no *canal de reação*.

A ocorrência de uma reação nuclear através de um dado canal de reação se traduz por uma modificação da parte emergente de (9.18), agora não mais por um fator de fase apenas, mas por um fator que muda sua amplitude, indicando que há uma perda de partículas no canal elástico. Isso pode se expressar por

$$\Psi \sim \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) \left[\eta_l \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{kr} - \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{kr} \right], \quad (10.23)$$

onde o coeficiente complexo η_l é o fator mencionado acima. Para calcular a seção de

choque elástica devemos colocar Ψ na forma (9.2); usando (9.18) e (10.23) ficamos com

$$f(\theta) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i (1 - \eta_l) P_l(\cos\theta), \quad (10.24)$$

no que resulta a seção de choque diferencial de espalhamento

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l) P_l(\cos\theta) \right|^2. \quad (10.25)$$

A seção de choque total de espalhamento se calcula usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre, do que resulta

$$\sigma_e = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2, \quad (10.26)$$

com $\lambda = \lambda/2\pi = 1/k$.

Para se calcular a seção de choque de reação é necessário computar inicialmente o número de partículas que desaparece do canal elástico, que é medido pelo fluxo do vetor corrente de probabilidade através de uma superfície esférica de raio grande centrada no alvo, calculada com a função de onda total (10.23):

$$j_r = -\frac{\hbar}{2im} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} \right) r^2 d\Omega. \quad (10.27)$$

O sinal negativo indica que uma absorção corresponde à entrada de fluxo na esfera. A seção de choque procurada será a razão entre j_r e a corrente de probabilidade para a onda plana incidente, $j_i = \hbar k/m$. Dessa forma se chega a

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2). \quad (10.28)$$

De (10.24), (10.26) e (10.28) pode-se obter facilmente que a seção de choque total $\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r$ está ligada à amplitude de espalhamento no ângulo zero pela relação (9.26), mostrando que o teorema óptico continua válido com a presença de canais de reação diferentes do canal elástico.

Observemos as equações (10.26) e (10.28): quando $|\eta_l| = 1$ a seção de choque de reação se anula e temos espalhamento puro. O contrário, no entanto, não pode ocorrer, pois a nulidade de σ_e implica na nulidade também de σ_r . De modo geral há uma região

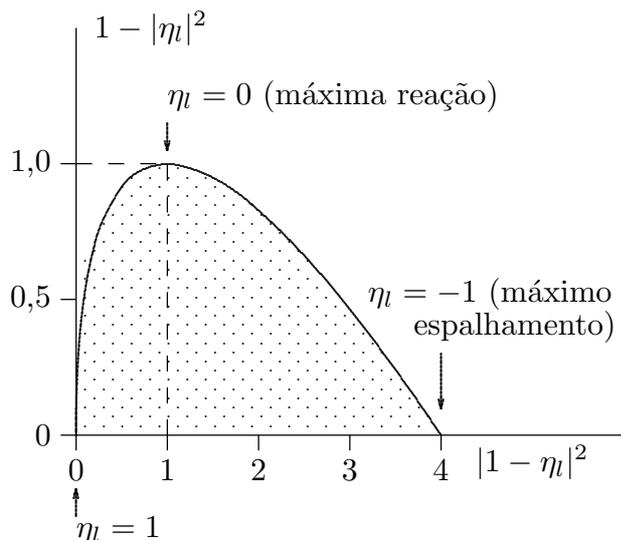


Fig. 10.5 - Região (abaixo da curva) de coexistência das seções de choque de espalhamento e reação.

permitida de valores de η_l para os quais as duas seções de choque podem coexistir. Tal região se situa abaixo da curva mostrada na figura 10.5.

O máximo de σ_r ocorre para $\eta_l = 0$, o que corresponde à absorção total. Suponhamos que o potencial absorvedor seja limitado pela superfície de um núcleo de raio $R \gg \lambda$, isto é, que todas as partículas de parâmetro de impacto menores que o raio R sejam absorvidas. Isso é o mesmo que dizer que são absorvidas todas as partículas de $l \leq R/\lambda$. Nesse caso

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l + 1) = \pi(R + \lambda)^2. \quad (10.29)$$

Esse é o valor que seria intuitivamente adequado para a seção de choque total, ou seja, igual à seção de choque geométrica (a parcela λ pode ser entendida como uma incerteza na posição da partícula incidente). Mas, vimos linhas atrás que a presença do espalhamento é sempre obrigatória. Como $\eta_l = 0$, a seção de choque de espalhamento é idêntica à de reação, produzindo uma seção de choque total

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_e = \pi(R + \lambda)^2 + \pi(R + \lambda)^2 = 2\pi(R + \lambda)^2 \quad (10.30)$$

que é o dobro da seção de choque geométrica!

A presença da parcela de espalhamento, que torna o resultado (10.30) aparentemente estranho, pode ser interpretada como o efeito de difração da onda plana na superfície nuclear (figura 10.6). Esse efeito faz com que a “sombra” atrás do núcleo vá diminuindo seu diâmetro aparente até que, a uma certa distância, a perturbação causada pela presença do núcleo desaparece e a onda plana é refeita. Nessa situação podemos

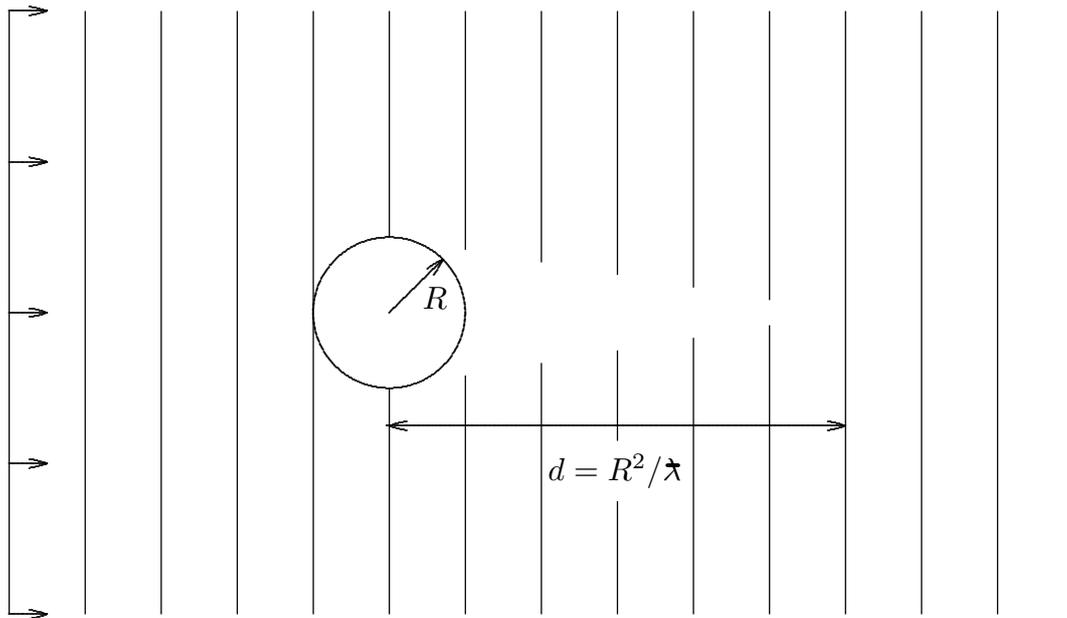


Fig. 10.6 - Região de sombra produzida pela absorção total de partículas do feixe incidente por um núcleo de raio R .

dizer que a parte do feixe que foi difratada tem que ser igual à parte que foi absorvida, justificando a igualdade de σ_r e σ_e . Podemos calcular também a extensão da sombra formada atrás do núcleo usando o Princípio da Incerteza: a limitação da absorção a um círculo de raio R cria uma incerteza no momento transversal $\Delta p = \hbar/R$ e a distância d mostrada na figura 10.6 é o resultado da proporção $R/d = \Delta p/p$, usando $p/\hbar = k = 1/\lambda$. Esse é o mesmo resultado obtido pelo estudo da difração de Fraunhofer na absorção de um feixe luminoso por um objeto escuro. Só que nesse caso as distâncias d são grandes para objetos de uso comum em ótica enquanto no caso nuclear d pode ser da ordem de alguns diâmetros nucleares se a energia das partículas incidentes for suficientemente pequena. O fenômeno de difração aparece claramente na distribuição angular (seção de choque diferencial em função do ângulo de espalhamento) de espalhamento elástico ou inelástico: a figura 10.7 mostra distribuições angulares do espalhamento elástico de prótons de 30 MeV no ^{40}Ca , ^{120}Sn e ^{208}Pb . As oscilações nas seções de choque são características de uma figura de difração de Fraunhofer, similar a do espalhamento de luz por um disco opaco. As distâncias angulares $\Delta\theta$ entre os mínimos de difração seguem de forma razoável a expressão $\Delta\theta = \hbar/pR$ que se obtém das considerações acima.

Vamos agora expressar as seções de choque a partir de condições especificadas sobre a superfície nuclear. As equações (10.26) e (10.28) mostram que as seções de choque de espalhamento e reação ficam completamente definidas com o conhecimento dos coeficientes η_l . Nosso objetivo é relacionar os η_l com as propriedades internas do núcleo. Esse estudo será feito para nêutrons de $l = 0$ e vamos, por enquanto, ignorar os

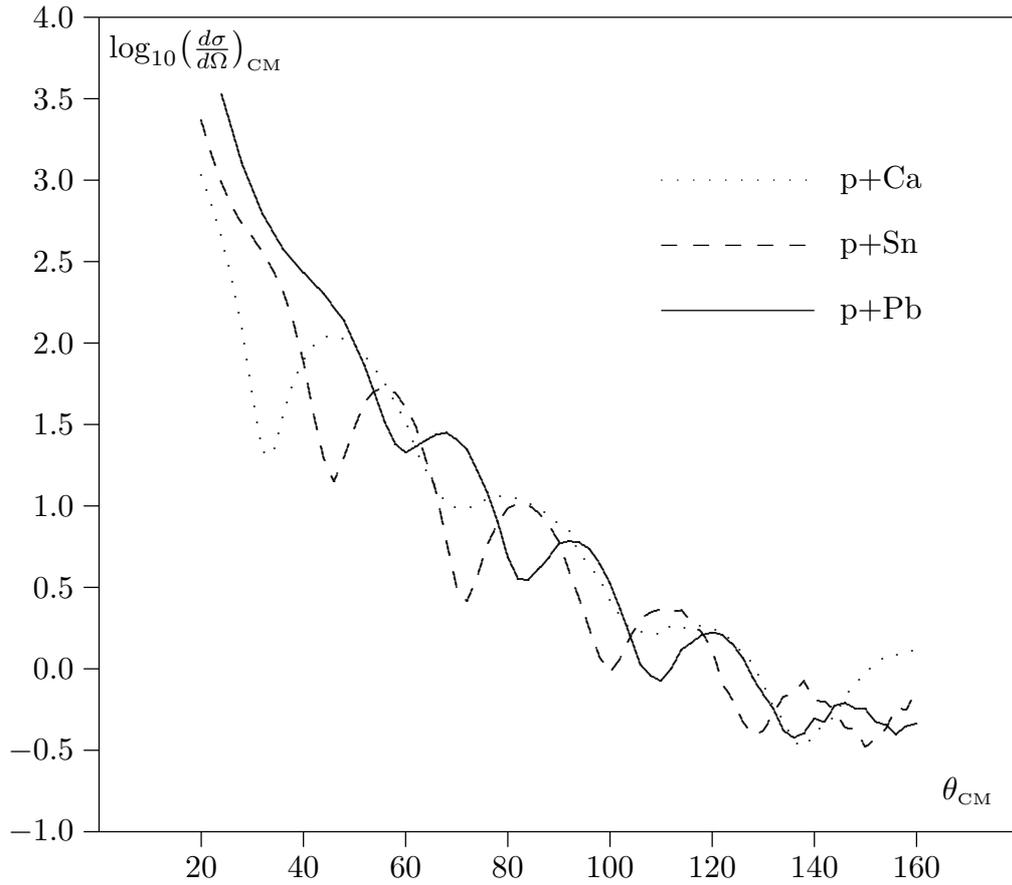


Fig. 10.7 - Distribuição angular do espalhamento elástico de prótons de 30 MeV no Ca, Sn e Pb. As curvas são ajustadas aos dados experimentais de Ridley e Turner [RT64].

spins do nêutron e do alvo. Nesse caso é válida a equação (9.34b)

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + k^2 u_0 = 0 \quad (r \geq R) \quad (10.31)$$

para a função de onda radial u_0 para distâncias r maiores do que o raio do canal $R = R_a + R_A$, sendo R_a e R_A os raios do projétil e do alvo, respectivamente. A solução de (10.31) é, usando (9.14) e (10.23),

$$u_0 = \eta_0 e^{ikr} - e^{-ikr} \quad (r \geq R). \quad (10.32)$$

A função de onda radial no interior do núcleo deve se ligar à função externa (10.32), com a função e sua derivada contínuas em $r = R$. Para a aplicação desse princípio é essencial que se trabalhe com a hipótese de que o núcleo tem uma superfície bem definida. A função

$$f_l \equiv R \left[\frac{du_l/dr}{u_l} \right]_{r=R} \quad (10.33)$$

deve ter valores idênticos se calculada com a função interna ou a externa e essa condição cria uma relação entre f_l e η_l . Assim, o conhecimento de f_l leva ao conhecimento das seções de choque. Para nosso exemplo de nêutrons de $l = 0$, a aplicação de (10.33) resulta em

$$f_0 = ikR \frac{\eta_0 + e^{-2ikR}}{\eta_0 - e^{-2ikR}}, \quad (10.34)$$

de onde se extrai

$$\eta_0 = \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} e^{-2ikR}. \quad (10.35)$$

Se f_0 for um número real, então $|\eta_0|^2 = 1$. A seção de choque de reação (10.28) será nula e teremos espalhamento puro.

Usando (10.35) a seção de choque de espalhamento (10.26) pode ser escrita como

$$\sigma_{e,0} = \pi \lambda^2 |A_{\text{res}} + A_{\text{pot}}|^2, \quad (10.36)$$

com

$$A_{\text{res}} = \frac{-2ikR}{f_0 - ikR} \quad (10.37)$$

e

$$A_{\text{pot}} = \exp(2ikR) - 1. \quad (10.38)$$

A separação da seção de choque em duas parcelas tem justificativa física: A_{pot} não contém f_0 e não depende, portanto, das condições no interior do núcleo, devendo representar a situação onde o projétil não chega a penetrar no núcleo, sendo espalhado pelo seu potencial externo. Isso é visto claramente na situação idealizada onde o núcleo é considerado uma esfera dura impenetrável. Nesse caso a função de onda é nula no interior do núcleo e u_0 se anula em $r = R$, fazendo $f_0 \rightarrow \infty$ e $A_{\text{res}} \rightarrow 0$. Dessa forma, A_{pot} é o único responsável pelo espalhamento.

Aplicando agora (10.35) à seção de choque de reação (10.28) e usando

$$f_0 = f_R + if_I \quad (10.39)$$

temos

$$\sigma_{r,0} = \pi \lambda^2 \frac{-4kRf_I}{f_R^2 + (f_I - kR)^2}, \quad (10.40)$$

fórmula que nos será útil quando estudarmos a presença de ressonâncias nas curvas de excitação (seção de choque em função da energia).

10.5 - Reações com Formação de Núcleo Composto

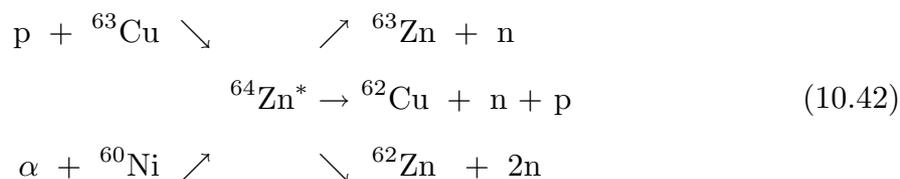
É hora de analisarmos os mecanismos que entram em jogo durante uma colisão nuclear. A atuação desses mecanismos depende da energia de colisão de um modo muito pronunciado e resultados do estudo de uma dada reação nuclear só têm validade para determinada faixa de energias.

Inicialmente vamos admitir, por simplicidade, que a partícula incidente é um nêutron de baixa energia (< 50 MeV). Quando esse nêutron entra no campo de ação das forças nucleares ele pode ser espalhado ou iniciar uma série de colisões com os núcleons. Os produtos dessas interações, incluindo a partícula incidente, vão prosseguir em seu percurso, provocando novas colisões e novas trocas de energia. No decorrer desse processo uma ou mais partículas podem ser emitidas e elas formam com o núcleo residual os produtos de uma reação que se denomina de *pre-equilíbrio*. Mas, em baixas energias, a probabilidade maior é a continuação do processo até que a energia inicial seja distribuída por todos os núcleons sem que nenhuma partícula seja emitida. O núcleo de $A + 1$ núcleons assim formado tem uma energia de excitação igual à energia cinética do nêutron incidente mais a energia de ligação desse nêutron no novo núcleo e é altamente instável. Ele pode, entre outros processos, emitir um nêutron com energia igual ou inferior ao que foi absorvido. Os processos de desexcitação não são necessariamente imediatos e o núcleo excitado pode viver um tempo relativamente longo. Nessa situação dizemos que houve a formação de um *núcleo composto* como etapa intermediária da reação. Na etapa final o núcleo composto pode evaporar uma ou mais partículas, fissionar, etc... Em nossa notação para o processo mais comum em que se formam dois produtos finais (a partícula evaporada mais o núcleo residual ou os dois fragmentos de fissão, etc...) escrevemos:



o asterisco indicando que o núcleo composto C está em um estado excitado.

O núcleo composto vive tempo suficiente para “esquecer” o modo como foi formado e a desexcitação nos produtos finais b e B só depende da energia, momento angular e paridade do estado quântico do núcleo composto. Uma interessante verificação experimental foi realizada por S. N. Goshal em 1950 [Go50]. Ele estudou duas reações que levam a um mesmo núcleo composto, o ${}^{64}\text{Zn}^*$, e mediu as seções de choque de três formas distintas de decaimento, como mostra o esquema abaixo:



O ${}^{64}\text{Zn}$ pode ser formado pelas duas reações e decair pelos três modos indicados em (10.42). Se a idéia do núcleo composto é válida e se escolhermos as energias do próton e da partícula- α incidente de modo a produzir a mesma energia de excitação, então a seção de choque para cada um dos três canais de saída deve ser independente do modo como o núcleo composto foi formado, isto é, as propriedades do núcleo composto não

devem ter mais relação com os núcleos que o formaram. Isso é confirmado na figura 10.8, onde se vê claramente que as seções de choque só dependem praticamente dos canais de saída.

Fig. 10.8 - Seções de choque para as reações mostradas em (10.42). As escalas dos eixos superior (energia dos prótons) e inferior (energia das partículas- α) foram ajustadas de modo a corresponder à mesma energia de excitação do núcleo composto [Go50].

Outra particularidade que deve ocorrer em reações em que há formação de núcleo composto se refere à distribuição angular dos fragmentos, ou partículas, evaporados: ela deve ser isotrópica no centro de massa, e isso é experimentalmente verificado. Já foi mencionado, entretanto, que quantidades como o momento angular total são conservadas e não podem ser “esquecidas”. Reações com grande transferência de momento angular, como as que ocorrem quando se usam íons pesados como projéteis, podem mostrar uma distribuição angular não isotrópica no sistema do centro de massa.

A ocorrência da reação nuclear em duas etapas permite que a seção de choque para uma reação $A(a,b)B$ seja escrita como um produto,

$$\sigma(a,b) = \sigma_c(a,A)P(b), \quad (10.43)$$

onde $\sigma_c(a, A)$ é a seção de choque de formação do núcleo composto a partir do projétil a e do alvo A e $P(b)$ é a probabilidade de o núcleo composto emitir uma partícula b deixando um núcleo residual B . Se não somente as partículas mas os números quânticos de entrada e saída forem bem especificados, ou seja, se a reação se iniciar por um canal α de entrada e desembocar em um canal β de saída, (10.43) passa a ser escrita

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sigma_c(\alpha)P(\beta). \quad (10.44)$$

Usando os conceitos estabelecidos nas seções 5.2 e 5.7 podemos associar a probabilidade $P(\beta)$ à largura Γ_β do canal β e escrever:

$$P(\beta) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma}, \quad (10.45)$$

onde Γ é a largura total, ou seja, $\tau = \hbar/\Gamma$ é a meia-vida de desintegração do núcleo composto. Na competição entre os diversos canais β , os núcleons têm clara preferência sobre a radiação gama sempre que houver energia disponível para sua emissão e, entre os núcleons, os nêutrons têm preferência por não terem a barreira coulombiana como obstáculo. Assim, em uma reação onde não existem restrições para a emissão de nêutrons podemos dizer que

$$\Gamma \cong \Gamma_n, \quad (10.46)$$

onde Γ_n engloba a largura para a emissão de um ou mais nêutrons.

O estudo da função $P(\beta)$ é feito em um modelo de evaporação que conduz a resultados em muitos aspectos semelhantes aos da evaporação de moléculas de um líquido, tendo a energia dos nêutrons emitidos a forma aproximada de uma distribuição de Maxwell

$$I(\epsilon) \propto \epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon}{\theta}\right) d\epsilon, \quad (10.47)$$

com I medindo a quantidade de nêutrons emitidos com energia entre ϵ e $\epsilon + d\epsilon$. A quantidade θ , com dimensão de energia, faz o papel de uma *temperatura nuclear*. Ela é ligada à densidade de níveis ω do núcleo produto B por

$$\frac{1}{\theta} = \frac{dS}{dE}, \quad (10.48)$$

com

$$S = \log \omega(E) \quad (10.49)$$

onde, para uso em (10.47), dS/dE deve ser calculada para o núcleo produto B na máxima energia de excitação que ele pode ter após a emissão de um nêutron, ou seja, no limite de liberação de um nêutron com energia cinética zero.

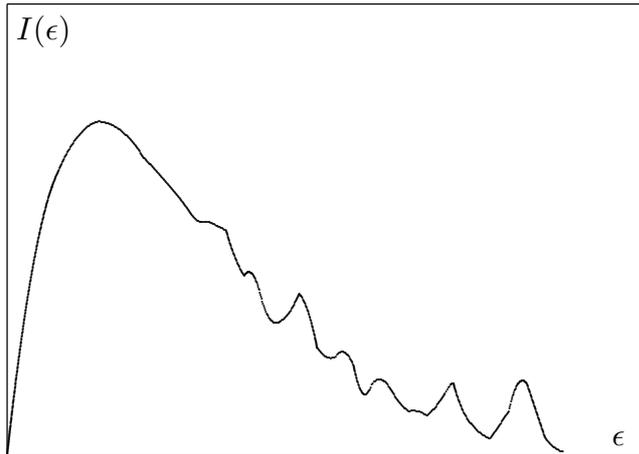


Fig. 10.9 - Espectro de energia dos nêutrons evaporados pelo núcleo composto.

A densidade de níveis $\omega(E)$ é uma medida do número de estados de energia disponíveis para o decaimento do núcleo composto no intervalo dE em torno da energia E . Nesse sentido, a relação (10.49) é, a menos da ausência da constante de Boltzmann, idêntica à relação termodinâmica entre a entropia S e o número de estados disponíveis para a transformação de um sistema. A entropia S definida dessa forma é adimensional e (10.48) é a conhecida conexão entre a entropia e a temperatura, essa última tendo, no presente caso, a dimensão de energia.

A distribuição de energia dos nêutrons emitidos pelo núcleo composto tem o aspecto da curva mostrada na figura 10.9. Note que só a parte de baixa energia obedece a (10.47) e a razão é simples: a emissão de um nêutron de baixa energia deixa o núcleo residual com uma grande energia de excitação, uma situação onde a densidade de níveis é muito alta. Essa grande densidade de estados finais disponíveis torna o problema tratável pelo modelo estatístico que conduziu a (10.47). Na situação inversa, são os estados de baixa energia do núcleo residual que contribuem e esses estados isolados aparecem como picos proeminentes na cauda da distribuição. Quando a emissão é de um próton ou de outra partícula carregada, a forma da figura 10.9 é distorcida, a parte de baixa energia do espectro sendo parcialmente suprimida pela barreira coulombiana.

A seção de choque de formação do núcleo composto $\sigma_c(\alpha)$ pode ser determinada de modo simples se algumas hipóteses adicionais sobre a reação forem feitas. Vamos supor, primeiro, que só haja espalhamento elástico ou formação de núcleo composto. Se os projéteis são nêutrons isso é verdadeiro para energias do nêutron $E_n < 50$ MeV. Segundo, vamos admitir que o espalhamento elástico seja puramente potencial, não havendo espalhamento elástico ressonante, isto é, não havendo reemissão pelo núcleo composto de nêutrons com energia igual à energia incidente. Isso é equivalente a dizer que a probabilidade de o canal de saída ser o próprio canal de entrada é muito baixa. Veremos que isso deixa de ser verdade para certos valores especiais da energia da partícula incidente.

De acordo com essas hipóteses, a seção de choque $\sigma_c(\alpha)$ de (10.44) é a seção de

choque de reação (10.28). Com as hipóteses feitas podemos ainda escrever que a função de onda no interior do núcleo é apenas uma onda entrante

$$u_0 \cong \exp(-iKr) \quad (r < R), \quad (10.50)$$

sendo $K = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ o número de ondas no interior do núcleo, onde se supõe que o nêutron com energia total E está sujeito a um potencial negativo V_0 . A expressão (10.50) é claramente uma simplificação grosseira para uma situação onde o nêutron incidente interage de forma complicada com os demais núcleons do núcleo. Ela permite, contudo, explicar o comportamento médio das seções de choque a baixas energias. A partir de (10.33) e (10.50) fica determinado o valor de f_0 :

$$f_0 = -iKR \quad (10.51)$$

e, com ele, a expressão

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \frac{4kK}{(k + K)^2}. \quad (10.52)$$

para a seção de choque de formação do núcleo composto por nêutrons de $l = 0$. Em baixas energias, $E \ll |V_0|$, logo $k \ll K$. Nessas condições, $\sigma_c = 4\pi/kK$, já que $\lambda = k^{-1} \gg R$. Assim, σ_c varia com $1/k$, ou seja,

$$\sigma_c \propto \frac{1}{v}, \quad (10.53)$$

sendo v a velocidade do nêutron incidente. Essa é a conhecida *lei 1/v* que rege o comportamento da seção de choque de captura de nêutrons de baixa energia. A figura 10.10 mostra a função de excitação (seção de choque em função da energia) para a reação $n+^{235}\text{U}$. A seção de choque decai com $1/v$ até 0,3 eV, onde uma série de ressonâncias começa a aparecer. Esse comportamento abrupto das seções de choque não se enquadra na teoria do núcleo composto e veremos na próxima seção que as ressonâncias surgem justamente quando não é possível sustentar a hipótese de que não há retorno no canal de entrada, hipótese essa que levou a (10.50).

10.6 - Ressonâncias

Para entendermos porque ocorrem ressonâncias, vamos utilizar novamente o modelo simples de uma partícula única sujeita ao potencial do poço quadrado. Sabemos que, para dentro do poço, a equação de Schrödinger só admite solução para um conjunto discreto de valores da energia, E_1, E_2, \dots, E_n . Um modo qualitativo de entender porque isso ocorre é ter em conta que uma partícula está confinada ao interior do poço pelas reflexões que faz na superfície do mesmo. Nessas reflexões a onda que representa a

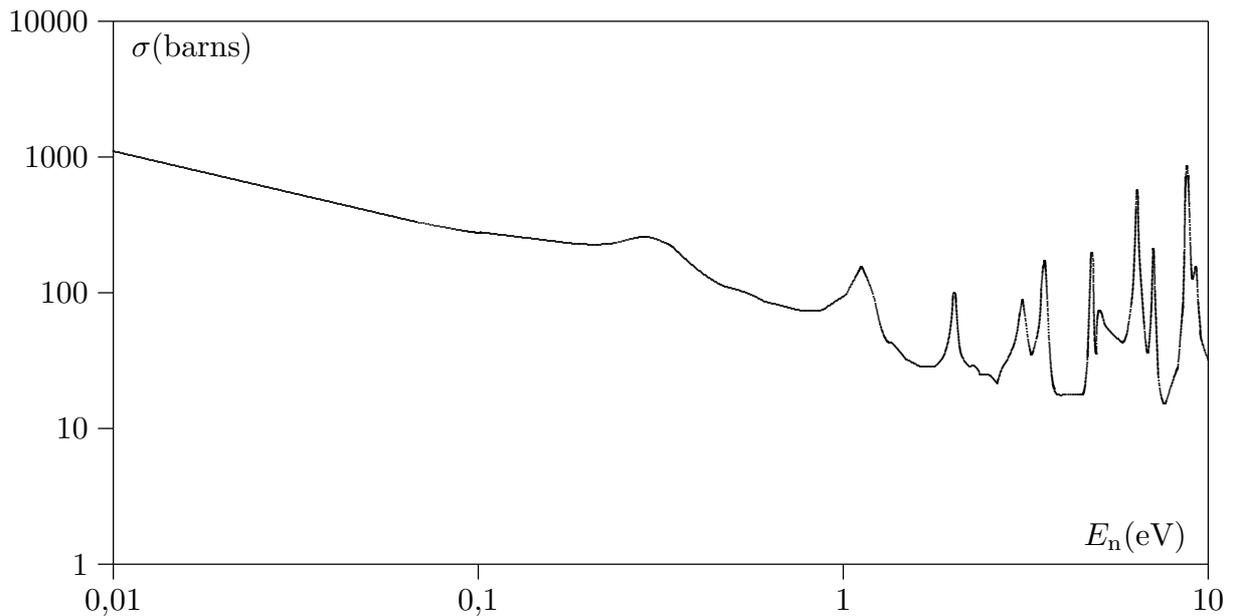


Fig. 10.10 - Seção de choque total para nêutrons de baixa energia incidindo no ^{235}U .

partícula deve estar em fase antes e depois da reflexão e isso ocorre somente para um conjunto finito de energias. Fora do poço a equação de Schrödinger não impõe restrições e a energia pode ter qualquer valor. Mas, sabemos, do estudo da passagem de um feixe de partículas por um degrau de potencial, que a descontinuidade do potencial no degrau provoca reflexão do feixe mesmo quando a energia total das partículas é maior do que o degrau, situação onde classicamente não haveria nenhum empecilho à passagem das partículas. Essa reflexão é parcial e é tanto maior quanto mais próxima a energia total for da energia potencial. Podemos dizer que uma partícula com energia ligeiramente positiva está quase tão confinada quanto uma partícula no interior do poço. Desse fato resulta a existência de estados quase ligados de energia positiva chamados de *estados quase-estacionários* ou *ressonâncias*. Essas ressonâncias aparecem como picos proeminentes na função de excitação, um pico em uma dada energia significando que aquela energia coincide com uma dada ressonância do núcleo.

A existência de ressonâncias pode também ser inferida das propriedades da função de onda. Vamos examinar o caso simplificado onde só há espalhamento elástico, estando os demais canais fechados. Observemos a figura 10.11. As funções de onda externa e interna ao núcleo são ambas senóides, a primeira com número de ondas $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ e a segunda com $K = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Se E é pequeno e V_0 cerca de -35 MeV, temos $K \gg k$. A parte interna e externa devem se unir em $r = R$ com função e derivada contínuas. Como a frequência interna é muito maior do que a externa, a amplitude da parte interna fica bastante reduzida. Só nas proximidades da situação em que a derivada é nula há um perfeito casamento entre ambas e a amplitude da parte interna é idêntica à da parte externa. As energias em que isso ocorre são justamente as energias de ressonância.

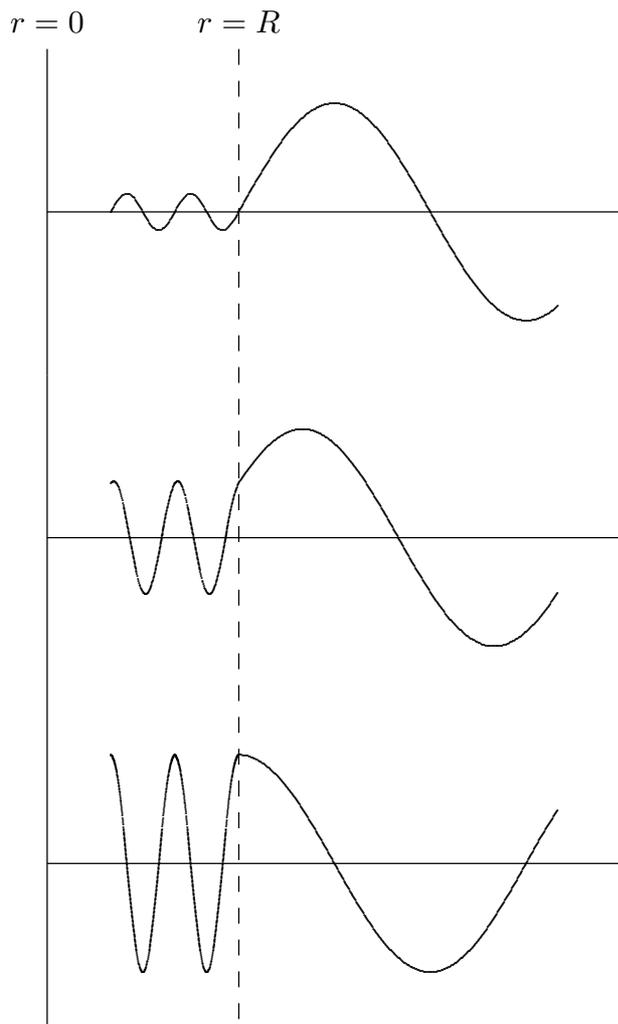


Fig. 10.11 - Acoplamento das funções de onda interna e externa ao núcleo, mostrando como uma amplitude grande da função interna é conseguida na ressonância.

Ressonâncias aparecem na função de excitação em energias relativamente baixas, onde o número de canais abertos não é muito grande e a hipótese de que não há retorno pelo canal de entrada não é válida. Para chegarmos a uma expressão da seção de choque que descreva uma ressonância, vamos reescrever (10.50),

$$u_l \sim \exp(-iKr) + b \exp(iKr) \quad (r < R), \quad (10.54)$$

desta vez contendo uma segunda parcela que leva em conta a parte da onda que retorna. Essa segunda parcela permite a existência de espalhamento ressonante, onde a partícula incidente é reemitida com a mesma energia que entrou, após formar o núcleo composto. A amplitude complexa b tem seu módulo sempre menor do que 1, já que não podem sair da região $r < R$ mais partículas do que entram.

A aplicação de (10.54) em (10.33) produz, naturalmente, os mesmos resultados que a função externa (10.32). Vamos analisar, em particular, a seção de choque de reação (10.40). O segundo parêntesis do denominador nunca se anula, já que o numerador obriga f_I a ser sempre negativo. Se em determinadas energias f_R se anula, $\sigma_{r,0}$ passa por um máximo naquela energia. Podemos tentativamente identificar essas energias como sendo as energias das ressonâncias. Tomemos o caso extremo de uma única ressonância na energia E_R , isto é, $f_R = 0$ para $E = E_R$. Podemos expandir f_R em uma série de Taylor na vizinhança de uma ressonância,

$$f_R(E) = (E - E_R) \left(\frac{df_R}{dE} \right)_{E=E_R} + \dots \quad (10.55)$$

Mantendo apenas o primeiro termo da expansão e aplicando em (10.36) e (10.40), ficamos com

$$\sigma_{e,0} = \pi \lambda^2 \left| \exp(2ikR) - 1 + \frac{i\Gamma_\alpha}{(E - E_R) + i\frac{\Gamma}{2}} \right|^2, \quad (10.56)$$

$$\sigma_{r,0} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_\alpha(\Gamma - \Gamma_\alpha)}{(E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (10.57)$$

onde foram definidos:

$$\Gamma_\alpha = -\frac{2kR}{(df_R/dE)_{E=E_R}} \quad \text{e} \quad \Gamma = \frac{2kR - 2f_I}{(df_R/dE)_{E=E_R}}. \quad (10.58)$$

A seção de choque de formação de um núcleo composto com uma energia E próxima a uma ressonância deve ser proporcional à probabilidade de o estado ressonante existir naquela energia. Essa probabilidade é dada por (5.36), e escrevemos:

$$\sigma_{R,0} \propto \frac{1}{(E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (10.59)$$

de onde se deduz que a energia Γ , definida em (10.58), que aparece em (10.57), é a largura total da ressonância, $\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_\beta + \dots$, ou seja, a soma das larguras para todos os possíveis processos de decaimento do núcleo a partir do estado ressonante. A interpretação de Γ_α segue da comparação de (10.57) e (10.56). Nessa última, a contribuição da parte ressonante para a seção de choque de espalhamento contém o fator $\Gamma_\alpha \Gamma_\alpha$ e (10.57) o fator $\Gamma_\alpha(\Gamma - \Gamma_\alpha)$. É justo interpretar Γ_α como sendo a largura do canal de entrada, ficando $\Gamma - \Gamma_\alpha$ como sendo a soma das larguras de todos os canais de saída excetuando-se α . Se restringirmos os canais de saída a um único canal β ou,

de outra forma, designarmos por β o conjunto de canais de saída exceto α , (10.57) se reescreve como

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_\beta}{(E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (10.60a)$$

que é o modo usual de apresentar o que é conhecida como a *fórmula de Breit-Wigner* para a descrição da forma da seção de choque próxima a uma ressonância. Lembremos que a fórmula (10.60a) se refere a uma partícula incidente de $l = 0$ sem carga e sem spin. Se os spins das partículas incidente e alvo são s_a e s_A , respectivamente, e se o feixe incidente é descrito por uma única onda parcial $l \neq 0$, mostra-se que a seção de choque (10.60a) deve ser multiplicada pelo fator estatístico

$$g = \frac{2(s_a + s_A) + 2l + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} \quad (10.60b)$$

que se reduz, naturalmente, ao valor $g = 1$ para o caso de serem nulos os momentos angulares intrínseco e orbital.

Se o canal de saída é o próprio canal de entrada α , a seção de choque deve ser obtida de (10.56) e sua dependência na energia é mais complicada pois em adição ao espalhamento ressonante há o espalhamento potencial, e a seção de choque (10.56) conterà, além desses dois termos, um termo de interferência entre ambos. A presença desses três termos resulta em um aspecto peculiar da seção de choque de espalhamento, que difere da forma simples (10.60) (ver figura 5.5) que tem a seção de choque de reação. Isso é visto na figura 10.12 que mostra as formas que pode assumir uma ressonância na seção de choque de espalhamento.

A região de energias onde ocorrem ressonâncias pode se estender até cerca de 10 MeV em núcleos leves mas termina bem antes em núcleos pesados. A partir daí o aumento na densidade de níveis com a energia faz com que a distância média entre os níveis seja menor do que a largura dos mesmos e ressonâncias individuais não podem mais ser observadas experimentalmente. Elas formam um contínuo e por esse motivo essa se denomina a *região do contínuo*. Mas, na região do contínuo, apesar de não existirem picos estreitos característicos das ressonâncias individuais, a seção de choque não varia monotonamente; picos de grande largura e muito espaçados podem ser observados, como mostram os exemplos da figura 10.13b e devem sua presença principalmente a fenômenos de interferência entre a parte do feixe incidente que passa através do núcleo e a parte que passa em torno dele [Mv67].

10.7 - O Modelo Ótico

A expressão (10.30) mostra que se uma partícula fosse sempre absorvida quando atingisse o núcleo, a seção de choque total deveria cair monotonamente com a energia e crescer linearmente com $A^{\frac{1}{3}}$. Já com os dados experimentais disponíveis ao final da década de 40 pôde-se perceber que essas tendências tinham desvios perceptíveis.

Fig. 10.12 - Seção de choque diferencial em quatro ângulos para o espalhamento elástico de prótons no ^{27}Al em unidades da seção de choque de Rutherford na vizinhança da ressonância de 1579 keV. Para os ângulos maiores temos figuras típicas de interferência entre o espalhamento ressonante e o espalhamento potencial [Tv72, reproduzida com a permissão da Elsevier Science].

Na figura 10.13 vemos curvas de seção de choque total de espalhamento de nêutrons mostrando um comportamento ondulatório tanto em sua variação com a energia quanto na variação com a massa do alvo. Vamos estudar nessa seção um modelo que explica esse comportamento introduzindo a idéia de que, ao penetrar em um núcleo, um núcleon tem uma probabilidade de ser absorvido menor do que 1, ou seja, o núcleo tem uma certa transparência para o feixe incidente. Isso se harmoniza com o modelo de partícula independente onde um núcleon tem um livre caminho médio apreciável na matéria nuclear e poderia, dessa forma, escapar do núcleo após algumas poucas interações.

As bases do *modelo ótico* foram estabelecidas por Herman Feshbach e colaboradores em 1953 [Fe53]; nesse modelo a interação dos núcleos de uma reação é descrita por um potencial $U(r)$, sendo r a distância entre os centros de massa dos dois núcleos. Essa idéia é semelhante à do modelo de camadas apresentado no capítulo 4, que substitui a complicada interação que um núcleon tem com o restante do núcleo por um potencial que atua sobre o núcleon. O potencial $U(r)$ inclui uma parcela complexa que, como veremos,

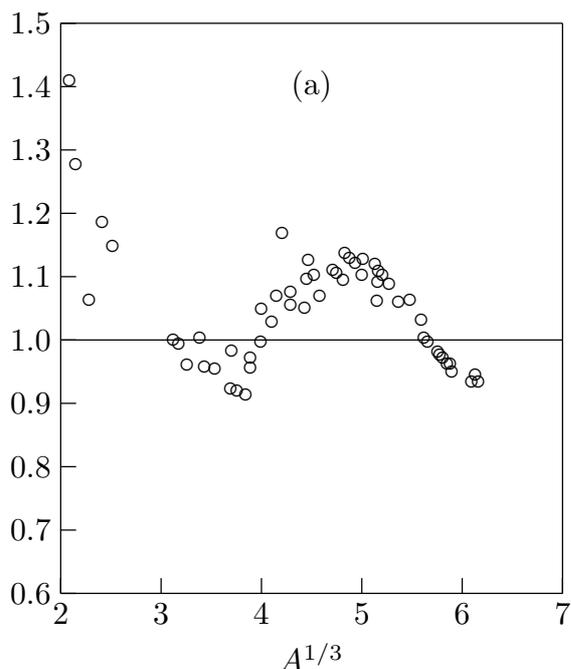


Fig. 10.13 - (a) Variação da razão $\sigma/[2\pi(r_0A^{1/3})^2]$ construída com a seção de choque total σ para nêutrons de 14 MeV em diversos núcleos, mostrando como ela flutua em torno do valor unitário previsto por (10.30). (b) Seção de choque total para nêutrons incidentes no cádmio, hólmio e chumbo mostrando um comportamento oscilatório na sua queda com a energia. As curvas do cádmio e chumbo são resultados de cálculos do modelo ótico [Ma68].

dá conta dos efeitos de absorção, ou seja, do espalhamento inelástico. O espalhamento nuclear é descrito de uma forma semelhante ao problema do espalhamento de luz por uma esfera de vidro translúcida e o nome do modelo deriva dessa analogia. No caso da luz, a absorção é incluída usando um índice de refração complexo.

Em sua forma mais comumente usada o potencial ótico é escrito como a soma:

$$U(r) = U_R(r) + U_I(r) + U_D(r) + U_S(r) + U_C(r), \quad (10.61)$$

que contém parâmetros que podem variar com a energia e as massas dos núcleos e que devem ser escolhidos por um ajuste aos dados experimentais. O potencial ótico $U(r)$ só terá sentido, obviamente, se essas variações forem pequenas para massas próximas ou energias vizinhas.

A primeira parcela de (10.61),

$$U_R(r) = -Vf(r, R, a), \quad (10.62)$$

real, representa o poço nuclear, com a profundidade $-V$ sendo multiplicada pelo fator de forma de Woods-Saxon

$$f(r, R, a) = \left(1 + e^{\frac{r-R}{a}}\right)^{-1}, \quad (10.63)$$

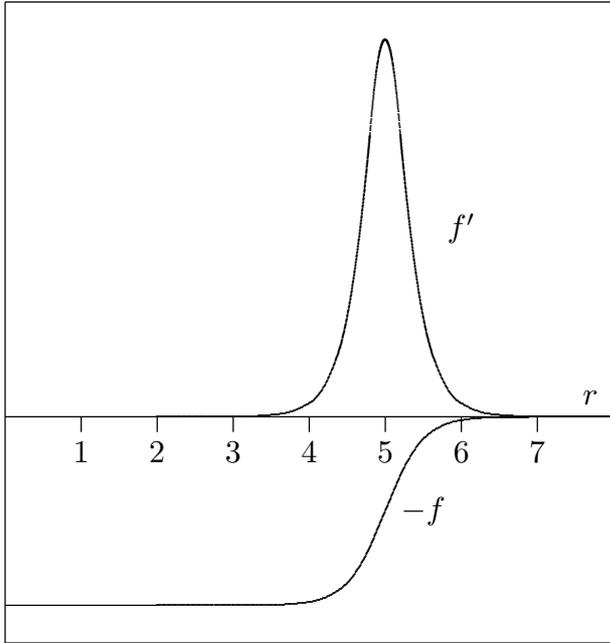


Fig. 10.14 - Aspecto do fator de forma de Woods-Saxon (10.63) e de sua derivada.

onde R é o raio do núcleo e a mede a difusividade do potencial, ou seja, a largura da região onde a função f é sensivelmente diferente de 0 ou 1 (ver figura 10.14). Isso produz um poço com bordas arredondadas, mais próximo da realidade do que um poço quadrado. Em (10.62) e (10.63), V , R e a são tratados como parâmetros ajustáveis.

O efeito de absorção ou, de outra forma, o desaparecimento de partículas do canal elástico, é levado em conta incluindo as duas parcelas imaginárias seguintes:

$$U_I(r) = -iWf(r, R_I, a_I) \quad (10.64)$$

e

$$U_D(r) = 4ia_IW_D \frac{d}{dr} f(r, R_I, a_I). \quad (10.65)$$

Uma parcela imaginária produz absorção. É fácil ver isso no problema do espalhamento por um poço quadrado, estudado na seção 9.4. Se uma parte imaginária é adicionada ao poço,

$$\begin{aligned} U(r) &= -V_0 - iW_0 & (r < r_0) \\ U(r) &= 0 & (r > r_0), \end{aligned} \quad (10.66)$$

ela aparece no valor de $K = [2m(E + V_0 + iW_0)]^{1/2}/\hbar$; isso produzirá um termo do tipo exponencial decrescente na função de onda interna, o que corresponde a uma absorção de partículas do feixe incidente.

A expressão (10.64) é responsável pela absorção em todo o volume de núcleo mas (10.65), construída com a derivada da função f atua especificamente na região próxima

à superfície nuclear, onde o fator de forma f sofre sua maior variação (ver figura 10.14). Essas duas parcelas têm funções complementares: em baixas energias não há estados desocupados disponíveis para núcleons no interior do núcleo e as interações são essencialmente na superfície. Nessa situação $U_D(r)$ é importante e $U_I(r)$ pode ser ignorado. Em altas energias, por outro lado, a partícula incidente tem maior penetração e nesse caso é a função $U_I(r)$ que é relevante.

À semelhança do potencial do modelo de camadas, um termo de acoplamento spin-órbita é acrescentado ao potencial ótico. Esse termo, que é a quarta parcela de (10.61), é usualmente escrito na forma

$$U_S(r) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} \left(\frac{\hbar}{M_\pi c^2} \right)^2 V_s \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_S, a_S), \quad (10.67)$$

incorporando um fator de normalização que contém a massa do pión M_π . \mathbf{s} é o operador de spin e \mathbf{l} o operador de momento angular orbital. Assim como $U_D(r)$, a parcela $U_S(r)$ também só é importante na superfície do núcleo e é a derivada do fator de forma que aparece em (10.63). Os valores de V_S , R_S e a_S devem ser ajustados pela experiência.

A presença do termo (10.67) é necessária para descrever o efeito de *polarização*. Por intermédio de experiências de duplo espalhamento pode-se verificar que feixes de prótons ou nêutrons sofrem forte polarização em certos ângulos. Isso significa que a quantidade

$$P = \frac{N_c - N_b}{N_c + N_b}, \quad (10.68)$$

onde N_c é o número de núcleons do feixe com spin para cima e N_b para baixo, tem um valor significativamente diferente de zero nesses ângulos. Com a inclusão do termo (10.67), o modelo ótico consegue reproduzir em muitos casos os valores experimentais da polarização (10.68).

Finalmente, um termo correspondente ao potencial coulombiano é acrescentado à (10.61) sempre que o espalhamento envolver partículas carregadas. Ele pode ter a forma

$$\begin{aligned} U_C(r) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_c} \left(3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right) & (r \leq R_c) \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & (r > R_c), \end{aligned} \quad (10.69)$$

onde se admite que o núcleo é uma esfera uniformemente carregada de raio igual ao *raio da barreira coulombiana* R_C , que delimita as regiões de predomínio de cada uma das forças, nuclear e coulombiana.

A figura 10.15 mostra o resultado da aplicação de (10.61) ao espalhamento elástico de prótons de 17 MeV em diversos núcleos leves. A distribuição angular vista na parte (a) é muito bem reproduzida pelo modelo, que também reproduz corretamente [parte (b)] a polarização (10.68) para o cobre em função do ângulo de espalhamento.

(a)

(b)

Fig. 10.15 - (a) Distribuição angular do espalhamento elástico de prótons de 17 MeV em núcleos da região $Z = 26 - 30$. (b) O valor da polarização (10.68) no espalhamento de prótons de 9,5 MeV no cobre. As curvas são, em ambos os casos, ajustes obtidos pelo modelo ótico [Pe63].

O modelo ótico tem um conjunto limitado de parâmetros ajustáveis e não é capaz de descrever variações abruptas nas seções de choque, como ocorre nas ressonâncias isoladas. Ele pode conseguir, no entanto, um bom ajuste para a seção de choque na presença das oscilações de grande largura da região do contínuo, por se tratarem essas de um fenômeno ondulatório (ver final da seção 10.6). Tal é o caso da figura 10.13b, que mostra a a seção de choque total para nêutrons incidindo em alvos de cádmio e chumbo.

10.8 - Reações Diretas

Ao final da seção 10.1 mencionamos a existência de reações que se processam através de uma interação projétil-alvo de curta duração. Vários desses mecanismos de reação direta são conhecidos, alguns deles já descritos na seção 10.1. Esse tipo de reação se torna mais provável à medida que aumenta a energia da partícula incidente: o comprimento de onda associado à partícula diminui e regiões localizadas do núcleo podem ser “vistas” pelo projétil. Nesse contexto, reações periféricas, onde só alguns poucos núcleons da superfície participam, começam a se tornar importantes. Essas reações diretas se dão em um tempo da ordem de 10^{-22} s; reações em que há a formação de um núcleo composto podem ser até seis ordens de grandeza mais lentas. Devemos acrescentar, que não há, necessariamente, exclusividade para uma ou outra forma de reação em uma dada energia; os mesmos produtos finais podem ser obtidos, parte dos eventos por via direta, parte através da formação e decaimento de um núcleo composto.

Deixando de lado o espalhamento elástico, que não é de interesse no presente estudo, podemos descrever dois tipos característicos de reações diretas. No primeiro, a partícula incidente sofre espalhamento inelástico e a energia transferida é usada para excitar um modo coletivo do núcleo. Bandas de rotação e vibração podem ser estudadas dessa forma. O segundo tipo envolve alteração na composição nucleônica dos participantes. Exemplos são as reações de transferência de núcleons, como as de *pick-up* e *stripping*, já mencionadas. Outra reação importante do segundo tipo é a de *knock-out*, onde a partícula incidente (geralmente um núcleon) arranca uma partícula do núcleo alvo e prossegue em seu caminho, resultando em três produtos da reação. Reações com troca de núcleons também podem ser usadas para excitar estados coletivos. Um exemplo é uma reação de *pick-up* onde um projétil captura um nêutron de um alvo deformado ficando o núcleo-filho em um estado excitado pertencente a uma banda de rotação.

Alguns tipos de reação direta exibem formas de distribuição angular características, que permitem extrair informações sobre o mecanismo da reação com o emprego de modelos simples. Exemplo típico são as reações de *stripping* (d,n) e (d,p) onde a distribuição angular do núcleon remanescente apresenta um pico proeminente para a frente e picos menores em ângulos maiores, com o aspecto característico de uma figura de difração.

Com o aumento da energia da partícula incidente, seria interessante inicialmente testar a aplicabilidade de métodos semi-clássicos no tratamento de uma reação direta. Tomemos como exemplo uma reação (d,n) (figura 10.16): um dêuteron de momento \mathbf{p}_a , seguindo uma trajetória retilínea clássica, atinge a superfície do núcleo, onde sofre um *stripping*, perdendo um próton para o interior do núcleo e liberando o nêutron de momento \mathbf{p}_b , que sai formando um ângulo θ com a direção incidente. O próton é incorporado ao núcleo com momento \mathbf{q} , transferindo para o mesmo um momento angular $\mathbf{l} = \mathbf{R} \times \mathbf{q}$, ou seja, aproximadamente $|\mathbf{l}|/\hbar$ unidades de momento angular.

Vamos nos fixar em um determinado nível de energia do núcleo produto, atingido por uma transferência de l unidades de momento angular. A energia do nêutron emergente fica determinada, bem como, para um dado ângulo de observação θ , o vetor \mathbf{q} , o que reduz as regiões da superfície do núcleo onde pode ocorrer a reação aos círculos

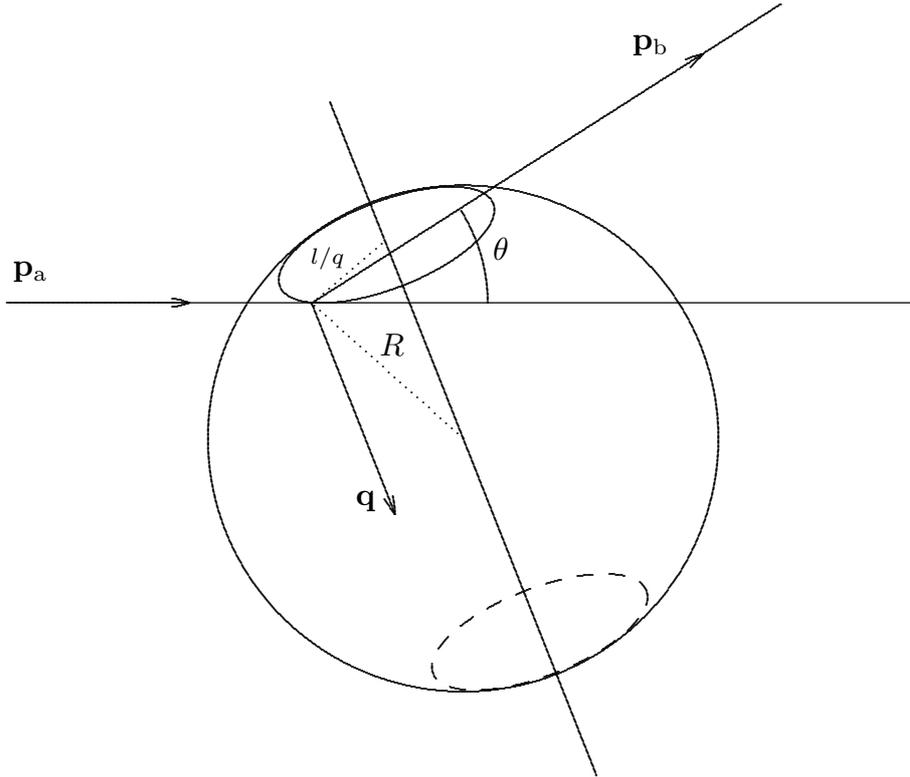


Fig. 10.16 - Representação de uma reação direta (d,n), onde o deuteron de momento \mathbf{p}_a atinge o núcleo, transferindo para o mesmo um próton de momento \mathbf{q} e liberando um nêutron de momento \mathbf{p}_b .

de raio l/q assinalados na figura 10.16. O fato de os raios dos círculos não poderem ser maiores do que o raio do núcleo impõe um valor mínimo para θ , valor que aumenta com o aumento de l .

Podemos dessa forma esboçar a previsão dessa abordagem semi-clássica para o comportamento da seção de choque diferencial. O ponto de partida é admitir que em uma reação direta as partículas saem com um momento considerável para a frente e deve-se esperar uma queda na seção de choque para ângulos crescentes. Com a restrição para o ângulo mencionada, a região válida para observação se situa acima do ângulo limite θ_l . O valor de θ_l resulta da simples aplicação da conservação de momento linear:

$$q^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta, \quad (10.70)$$

onde p_a e p_b são obtidos a partir das energias das partículas incidente e emergente e $q = l/R$. Para uma situação típica onde uma partícula incidente de dezenas de MeV excita os primeiros estados de baixa energia do núcleo produto, vemos por (10.70) que a variação de θ é essencialmente com o módulo do momento transferido, q , e no limite $q = l/R$, o ângulo correspondente, θ_l , cresce com l . E, finalmente, devemos esperar

que a distribuição angular seja uma função com máximos e mínimos, resultante da interferência entre eventos que ocorrem nos círculos superior e inferior representados na figura 10.16.

A figura 10.17 mostra resultados experimentais da reação $^{31}\text{P}(d,n)^{32}\text{S}$ [Mi87]: distribuições angulares dos nêutrons detectados correspondentes a cada nível de energia do ^{32}S são exibidas para cada momento angular correspondente. Vemos que o comportamento das seções de choque está de acordo com as previsões qualitativas acima: as curvas exibem um primeiro e mais importante pico em um valor de θ que cresce com l ; a partir daí seguem-se picos cada vez menores quando θ aumenta. O aumento de θ_l com l é uma importante característica que pode ser usada, como veremos adiante, para identificar o valor do momento transferido em uma dada distribuição angular.

Vejamos agora de que forma se pode aplicar um tratamento quântico a uma reação direta. Para tanto vamos inicialmente obter uma expressão para a seção de choque diferencial usando o conceito de probabilidade de transição que levou ao estabelecimento da regra de ouro n° 2, expressão (5.50).

Para a aplicação de (5.50) o estágio anterior à reação (10.9) (canal de entrada) será entendido como estado quântico inicial, constituído de partículas a de massa m_a incidindo em um alvo A de massa m_A . O estado quântico final é a situação após a reação (canal de saída), onde partículas b de massa m_b se afastam do núcleo B de massa m_B . A hipótese essencial para a aplicação da regra de ouro é a de que a interação responsável pela reação direta pode ser entendida como uma perturbação dentro do conjunto de interações que descrevem o sistema como um todo.

Se designarmos por λ a taxa de transição do estado quântico inicial para o estado quântico final, podemos escrever uma relação entre λ e a seção de choque total:

$$\lambda = v_a \sigma = \sigma \frac{k_a \hbar}{m_a}, \quad (10.71)$$

onde v_a é a velocidade das partículas do feixe incidente. Se agora $d\lambda$ é a parte relativa à emissão no ângulo sólido $d\Omega$,

$$d\sigma = \frac{m_a}{k_a \hbar} d\lambda \quad (10.72)$$

e, usando (5.40),

$$d\sigma = \frac{m_a}{k_a \hbar} \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 d\rho(E_f), \quad (10.73)$$

onde os índices i e f se referem aos estágios inicial e final da reação.

Um cálculo semelhante ao feito na seção 4.3 permite usar a expressão (4.15) para obter o valor de ρ :

$$\rho = \frac{dN}{dE} = \frac{pm_b a^3}{2\pi^2 \hbar^3}. \quad (10.74)$$

Se supusermos uma distribuição isotrópica de momentos para os estados finais, a fração $d\rho$ que corresponde ao ângulo sólido $d\Omega$ é

$$d\rho = \frac{pm_b a^3}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{k_b m_b a^3}{8\pi^3 \hbar^2} d\Omega \quad (10.75)$$

e, usando (10.75) em (10.73), obtemos uma expressão para a seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_a m_b k_b}{(2\pi \hbar^2)^2 k_a} |V_{fi}|^2, \quad (10.76)$$

envolvendo o elemento de matriz [ver notação (10.9)]

$$V_{fi} = \int \Psi_b^* \Psi_B^* \Psi_\beta(\mathbf{r}_\beta) V \Psi_a \Psi_A \Psi_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) d\tau. \quad (10.77)$$

$\Psi_a, \Psi_b, \Psi_A, \Psi_B$ são funções de onda internas dos núcleos a, b, A e B. Ψ_α, Ψ_β são as funções de onda do movimento relativo no canal de entrada α e no canal de saída β . O volume a^3 não foi escrito em (10.76) porque pode ser escolhido unitário, desde que as funções de onda que aparecem em (10.77) sejam normalizadas para 1 partícula por unidade de volume. V é o potencial perturbador que causa a “transição” do canal de entrada para o canal de saída. Ele pode ser entendido como uma interação adicional ao comportamento médio do potencial e, nesse sentido, ser escrito como a diferença entre o potencial total no canal de saída e o potencial do modelo ótico nesse mesmo canal.

O tratamento mais simples que se pode fazer de uma reação direta é considerar o feixe incidente como uma onda plana cuja única interação com o alvo é através do potencial perturbador que causa a reação. O feixe emergente também é tratado como uma onda plana. O uso de ondas planas para Ψ_α e Ψ_β em (10.77) se denomina *primeira aproximação de Born*. Com ela podemos chegar a uma expressão aproximada para o comportamento da seção de choque diferencial. Para tanto vamos partir do fato de que as forças nucleares são de curto alcance, o que permite restringir a integral (10.17) às regiões onde $\mathbf{r}_\alpha \cong \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}$. Disso resulta

$$V_{fi} \cong \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left\{ \int \Psi_b^* \Psi_B^* V \Psi_a \Psi_A d\tau' \right\}, \quad (10.78)$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\alpha - \mathbf{k}_\beta$. As variáveis englobadas em $d\tau$ foram separadas nas variáveis $d\mathbf{r}$ e $d\tau'$.

Vamos agora usar a expansão (9.15) para a onda plana de (10.78):

$$V_{fi} \cong \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \int j_l(kr) P_l(\cos\theta) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (10.79)$$

onde $F(\mathbf{r}) = \int \Psi_b^* \Psi_B^* V \Psi_a \Psi_A d\tau'$ concentra todas as propriedades internas e pode ser considerado como o *fator de forma* da reação. Vamos restringir a atuação de V à superfície do núcleo, o que é razoável: fora do núcleo a atuação de V é limitada pelo curto alcance das forças nucleares e dentro do núcleo há um forte desvio para o canal de absorção. A expressão (10.79) deve então ser reescrita com $r = R$ e obtemos:

$$V_{fi} \cong \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(kR), \quad (10.80)$$

onde os coeficientes c_l englobam as constantes que multiplicam a função de Bessel esférica em (10.79), inclusive a integral sobre o fator de forma $F(\mathbf{r})$. O cálculo desse fator é laborioso mesmo em casos mais simples [Bh52], mas o que queremos reter é a dependência em j_l . O índice l pode ser identificado como o momento angular transferido e, para uma reação que envolve um só valor de l , podemos escrever para a seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |j_l(kR)|^2, \quad (10.81)$$

onde a dependência em θ está contida em k :

$$k^2 = k_\alpha^2 + k_\beta^2 - 2k_\alpha k_\beta \cos \theta. \quad (10.82)$$

Temos aqui de novo um comportamento oscilatório para a distribuição angular, os máximos distando π entre si no eixo kR . Incidentalmente, esse mesmo resultado é obtido para a aproximação semi-clássica anteriormente desenvolvida (figura 10.16), no caso de pequenos ângulos de espalhamento e raios dos círculos pequenos. É, de fato, o resultado correspondente à interferência de duas fendas distantes $2R$.

A aproximação de Born com ondas planas prevê em certos casos o local correto dos primeiros picos na distribuição angular mas sem reproduzir corretamente as intensidades. Um avanço considerável pode ser feito no cálculo perturbativo se, ao invés de ondas planas em (10.77), usarmos ondas *distorcidas* (9.2) que contém, além da onda plana, a parte espalhada elasticamente pelo potencial ótico do alvo. A aproximação de Born com ondas distorcidas, ou DWBA (*distorted wave Born approximation*), tornou-se uma ferramenta de largo emprego na análise de resultados experimentais de reações diretas. Com ela se pode tentar extrair com uma certa confiança o valor do momento angular l transferido ou retirado do núcleo em uma reação de *stripping* ou *pick-up*. Para tanto basta comparar as distribuições angulares experimentais para uma dada energia de saída com os cálculos da DWBA e verificar para que valor de l os cálculos melhor se ajustam aos dados experimentais. Um exemplo é o da reação de *stripping* já mencionada $^{31}\text{P}(d,n)^{32}\text{S}$ iniciada por dêuterons de 25 MeV. Para os níveis de energia mostrados na figura 10.17 a atribuição do valor de l ao nível é, na maioria dos casos, inequívoca.

Fig. 10.17 - Distribuição angular da reação $^{31}\text{P}(\text{d},\text{n})^{32}\text{S}$, com a transferência de um próton para os diversos estados do ^{32}S . As curvas são resultados de cálculos da DWBA para os valores de l indicados [Mi87, reproduzida com a permissão da Elsevier Science].

O momento angular l transferido em uma reação direta modifica geralmente o valor do momento angular total do núcleo. Se J_i é o spin do núcleo alvo, o spin J_f do núcleo produto fica limitado aos valores

$$\left| |J_i - l| - \frac{1}{2} \right| \leq J_f \leq J_i + l + \frac{1}{2}, \quad (10.83)$$

e as paridades inicial e final obedecem à relação

$$\pi_i \pi_f = (-1)^l. \quad (10.84)$$

A relação (10.84) permite, com o conhecimento do núcleo alvo e do momento angular transferido, determinar a paridade do estado produto formado e (10.83) é um guia para a determinação de seu spin.

O conhecimento do valor do momento angular transferido em uma reação direta abre a possibilidade de testar as previsões do modelo de camadas para a formação dos estados fundamentais dos núcleos. Em uma reação direta admite-se que o núcleon é alojado em uma órbita do núcleo com um momento angular igual ao momento transferido na reação. A tabela 10.1 mostra uma série de núcleos na região $28 < A < 43$, onde as deformações são pequenas e o modelo de camadas simples funciona bem. Os núcleos são formados a partir de reações de *pick-up* ou *stripping* e o respectivo valor de l identificado por cálculos idênticos aos que resultaram nas curvas da figura 10.17. Uma comparação com a figura 4.9 mostra que em todos os casos o valor corresponde exatamente ao previsto pelo modelo de camadas. Para ilustrar, vamos examinar os dois exemplos da linha superior. No primeiro, o ^{28}Si é formado a partir de uma reação de *stripping* com a transferência de um próton e de duas unidades de momento angular. Se observarmos a figura 4.9 veremos que o 14^{o} próton vai se alojar na órbita $1d_{5/2}$, o que corresponde a $l = 2$. No segundo caso, o ^{40}Ca é formado por uma reação de *pick-up* que arranca o 21^{o} nêutron, e a figura 4.9 mostra que ele estava alojado em $1f_{7/2}$, justificando o valor $l = 3$ encontrado experimentalmente. O sucesso de uma comparação como essa não só evidencia mais uma vez a correção da concepção básica do modelo de camadas como também dá aval às idéias simples do modelo que descreve as reações diretas.

^{28}Si	+	p	2	^{40}Ca	-	n	3
^{29}P	+	p	0	^{41}Sc	+	p	3
^{31}S	-	n	0	^{42}K	+	n	3
^{35}P	-	p	0	^{42}Ca	+	p	2
^{37}K	+	p	2	^{43}K	-	p	2
^{40}Ar	-	p	2	^{43}Sc	+	p	3

Tab. 10.1 - Produtos formados por reação de *stripping* (+) ou *pick-up* (-) envolvendo a transferência de um próton (p) ou nêutron (n). A última coluna indica o valor experimental do momento angular orbital carregado pelo núcleon transferido.

Se o modelo de camadas fosse a teoria final sobre a distribuição dos níveis de energia do núcleo, os estados de partícula única acima de Z (ou N) deveriam aparecer como estados de energia do produto de uma reação de *stripping* que adiciona um próton (ou

nêutron) a um alvo de massa A . Em particular, os spins dos estados finais poderiam ser obtidos dos números quânticos j e l que identificam os estados de partícula única. Se, por exemplo, um próton é depositado acima da camada fechada de $Z = 50$ de um núcleo par-par e identificamos os valores de l associados a estados finais como sendo 0, 4 e 5, podemos dizer que os estados de partícula única $3s_{2/2}$, $1g_{7/2}$ e $1h_{11/2}$ (ver figura 4.9) irão aparecer como estados $\frac{1}{2}^+$, $\frac{7}{2}^+$ e $\frac{11}{2}^+$ no núcleo residual. Para $l = 2$ existiria a dúvida entre $2d_{5/2}$ e $2d_{3/2}$, que podem dar lugar a estados $\frac{5}{2}^+$ e $\frac{3}{2}^+$. Nesses casos, os spins desses estados devem ser determinados por outros processos.

Sabemos, no entanto, que a situação real é mais complicada, devido à presença das interações residuais que dão lugar a misturas de configurações (ver seção 4.7). A consequência é que um estado de partícula única $1g_{7/2}$, por exemplo, não irá necessariamente gerar um único estado final $\frac{7}{2}^+$. Ele pode se misturar com outras configurações de mesmo momento angular e paridade (nesse processo podem estar envolvidos até estados de natureza diferente, como estados coletivos) para gerar uma série de estados $\frac{7}{2}^+$ do núcleo final, cada um deles dispendendo apenas parte do seu tempo na configuração $1g_{7/2}$. Como resultado, a seção de choque para a formação de um estado i do núcleo produto se relaciona à calculada pela DWBA para a formação a partir de um estado de partícula única por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \mathcal{S}_{ij} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{DWBA}}, \quad (10.85)$$

onde o *fator espectroscópico* \mathcal{S}_{ij} mede o peso da configuração j usada no cálculo da DWBA no estado final i medido experimentalmente, com a soma das contribuições limitada a

$$\sum_i \mathcal{S}_{ij} = 1. \quad (10.86)$$

A soma (10.86) abrange todos os estados i do núcleo produto que contém uma dada configuração j . O peso estatístico $(2J_f + 1)/(2J_i + 1)$ que aparece no cálculo da DWBA (*), envolvendo o momento angular do núcleo alvo J_i e do núcleo final J_f , é explicitado em (10.85), pois os espectroscopistas costumam trabalhar com o produto

$$\mathcal{S}' = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \mathcal{S}, \quad (10.87)$$

denominado *poder espectroscópico* (*spectroscopic strength*). A vantagem da definição (10.87) é que \mathcal{S}' pode ser determinado por (10.85) mesmo quando o momento angular final J_f é desconhecido. Normalmente os valores de \mathcal{S}' entram como parâmetros para um melhor ajuste entre as curvas calculadas e as experimentais.

(*) Em uma reação de *pick-up* o peso estatístico é igual a 1.

$E(\text{keV})$	l	\mathcal{S}'	\mathcal{S}	$J(\pi)$
0	3	7,328	0,916	$\frac{7}{2}-$
646	1	2,796	0,699	$\frac{3}{2}-$
1398	2	0,212	0,053	$\frac{3}{2}+$
1992	1	0,3	0,075	$\frac{3}{2}-$
2023	(3)	0,08	(0,01;0,013)	$(\frac{7}{2}-, \frac{5}{2}-)$
2515	(3)	0,272	(0,034;0,045)	$(\frac{7}{2}-, \frac{5}{2}-)$
2638	1	1,662	0,831	$\frac{1}{2}-$
3262	1	0,568	0,142	$\frac{3}{2}-$
3355	1	0,120	(0,03;0,06)	$(\frac{3}{2}-, \frac{1}{2}-)$
3442	3	0,598	(0,075;0,1)	$(\frac{7}{2}-, \frac{5}{2}-)$
3493	1	0,340	(0,085;0,17)	$(\frac{3}{2}-, \frac{1}{2}-)$

Tab. 10.2 - Energia (E), momento angular transferido l e poder espectroscópico \mathcal{S}' para os primeiros níveis do ^{37}S populados pela reação $^{36}\text{S}(\text{d,p})^{37}\text{S}$. O fator espectroscópico \mathcal{S} e o spin e paridade $J(\pi)$ resultantes são mostrados nas últimas colunas [PS90,Th84]. Parêntesis indicam dúvidas sobre a atribuição dos valores.

Vamos mostrar, a título de ilustração, os resultados da reação $^{36}\text{S}(\text{d,p})^{37}\text{S}$, onde um nêutron é alojado acima da camada fechada $N = 20$ do $^{36}_{16}\text{S}$. A tabela 10.2 mostra os valores das energias dos primeiros níveis do ^{37}S formados pela reação, bem como o valor do momento angular transferido e do poder espectroscópico calculado por (10.85). O fator espectroscópico e o spin e paridade deduzidos também são mostrados.

Examinemos a tabela 10.2 usando as informações da figura 4.9. De acordo com a figura o nêutron ocupa as órbitas acima da camada fechada de 20 nêutrons e valores do momento angular transferido $l = 1$ e $l = 3$ são esperados. A coluna 2 confirma, com uma exceção, essa expectativa. Notemos que agora não é possível determinar univocamente os spins dos estados finais só com os valores de l , já que existem 2 valores de j para cada l . Nesse ponto, podemos lançar mão do poder espectroscópico \mathcal{S}' . Tomemos o estado fundamental, que é um $\frac{7}{2}-$ ou um $\frac{5}{2}-$, formado pela transferência de um nêutron de $l = 3$ para a órbita $1f_{7/2}$ ou $1f_{5/2}$. O valor de \mathcal{S}' é de 7,328 e a esse valor correspondem os valores 0,916 e 1,221 para \mathcal{S} . O último ultrapassa a soma (10.86) de uma quantidade acima da incerteza experimental, o que permite afirmar que o estado fundamental do ^{37}S é $\frac{7}{2}-$. Ele é um estado $1f_{7/2}$ quase puro, pois \mathcal{S} quase esgota a soma (10.86). Da mesma

maneira, o estado de energia 646 keV pode ser deduzido como sendo um $\frac{3}{2}^-$. Essas atribuições foram confirmadas por experiências onde se mede o grau de polarização do próton emergente da reação e que são capazes de distinguir contribuições de diferentes valores de j para um mesmo l . Da mesma forma foram determinados os spins dos estados de 1992 keV, 2638 keV e 3262 keV, que não podiam ser avaliados unicamente pelo valor do fator espectroscópico.

10.9 - Reações com Íons Pesados

As reações em que os núcleos participantes tem massa elevada apresentam algumas características próprias que fazem com que seu estudo seja um tópico especial da teoria de reações nucleares. É comum já se considerar um íon de $A > 4$ como um íon pesado, mas as propriedades que enumeramos abaixo são mais evidentes em reações envolvendo núcleos bem mais pesados do que esse limite.

1) Um projétil pesado, por ter uma carga muito grande, sofre uma intensa repulsão coulombiana do núcleo alvo. Para produzir uma reação nuclear ele deve ter energia suficiente para vencer a barreira coulombiana. Para um alvo muito pesado como o ^{238}U , por exemplo, são necessários cerca de 5 MeV por núcleon do projétil para este ultrapassar a barreira coulombiana. O comprimento de onda associado ao projétil se torna pequeno comparado com as dimensões dos núcleos envolvidos e métodos clássicos e semi-clássicos passam a ser úteis na descrição da reação.

2) O projétil carrega uma grande quantidade de momento angular e boa parte pode ser transferida para o alvo na reação. Bandas de rotação com várias dezenas de unidades de momento angular podem ser criadas nesse processo (ver seção 4.11) e as reações com íons pesados são as mais adequadas para alimentar níveis de alto spin.

3) Reações diretas e com formação de núcleo composto são também processos comuns a reações com íons pesados. Mas, certas peculiaridades destas não são encontradas em reações em que o projétil é um núcleon. Um desses processos pode ser entendido como intermediário entre uma reação direta e a formação de um núcleo composto. Não chega a haver a fusão mas projétil e alvo passam um tempo relativamente longo sob a ação mútua das forças nucleares. Matéria nuclear é trocada entre ambos e há um forte aquecimento dos dois núcleos, com grande transferência de energia cinética para graus de liberdade internos. Essas *colisões fortemente inelásticas* serão discutidas adiante.

O tipo de reação que irá ocorrer depende da menor distância d que projétil e alvo vão alcançar. Se essa distância for suficientemente grande só a interação coulombiana de longo alcance atua e, para uma trajetória hiperbólica clássica, d está relacionado ao parâmetro de impacto b e à energia E do projétil por [Go50]

$$d = \frac{a}{2} + \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b^2 \right]^{1/2}, \quad (10.88)$$

onde a é a menor distância do alvo que o projétil atinge em uma colisão frontal, e que é ligada a E por

$$a = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 E}. \quad (10.89)$$

Experimentalmente, a variável sob controle é a energia E do projétil e, para E suficientemente grande, d pode ser pequeno o bastante para as forças nucleares de curto alcance começarem a atuar. Colisões nas proximidades desse limite são ditas *rasantes* e são caracterizadas pelos valores b_r e d_r mostrados na figura 10.18.

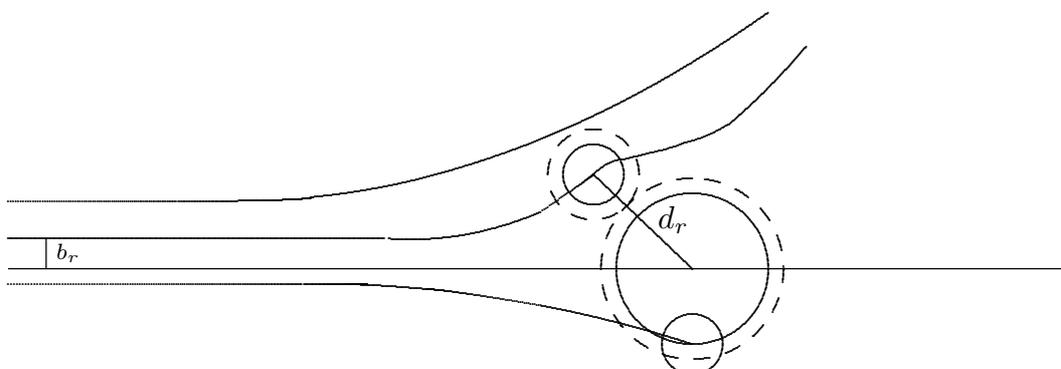


Fig. 10.18 - Projéteis com parâmetros de impacto maiores do que b_r só têm interação coulombiana com o alvo. Para $b < b_r$, projétil e alvo entram no raio de ação das forças nucleares. As colisões rasantes têm b próximo de b_r .

Admitindo que sempre haja reação quando $b < b_r$, a seção de choque de reação σ_r pode ser determinada geometricamente por

$$\sigma_r = \pi b_r^2. \quad (10.90)$$

A determinação experimental de σ_r permite estabelecer o valor de d_r em função da soma $A_1^{1/3} + A_2^{1/3}$ e o resultado é visto na figura 10.19. J. Wilczynski [WI73] verificou que a reta $d_r = 0,5 + 1,36(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ se ajusta bem aos valores experimentais, o que mostra que a distância de colisão rasante é algo maior do que a de duas esferas se tocando ($1,36 \text{ fm} > r_0 = 1,2 \text{ fm}$).

Quando o parâmetro de impacto é próximo a b_r o que se espera são reações nucleares de curta duração, sem a contribuição da formação de núcleo composto, tais como espalhamento elástico, inelástico e transferência de poucos núcleons. Quando a energia incidente é suficientemente alta pequenos valores de b podem levar à interpenetração de projétil e alvo. Dependendo da energia e das massas envolvidas, a reação pode desembocar em um dos processos abaixo:

a) Fusão - é o processo preferencial quando estão em jogo núcleos leves e energias baixas. Há a formação de um núcleo composto altamente excitado que decai por evaporação de partículas e emissão de radiação gama, levando a um núcleo residual frio. Se a energia no C.M. for próxima à da barreira coulombiana a seção de choque de formação

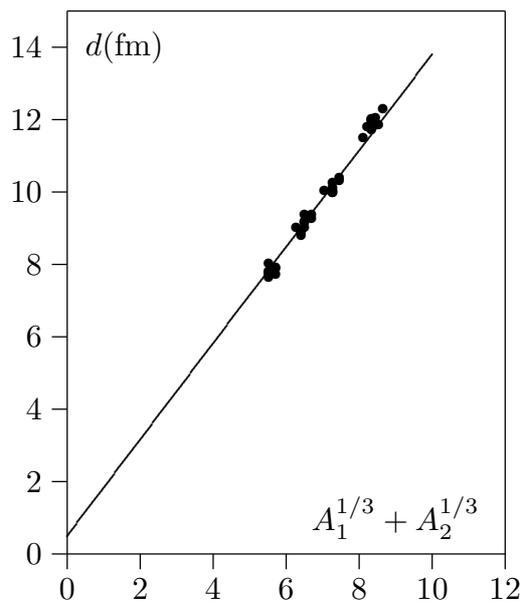


Fig. 10.19 - Menor distância entre os núcleos em uma colisão rasante em função de $A_1^{1/3} + A_2^{1/3}$. Os pontos experimentais são das referências [Ko68],[Na70] e [ZM73].

Fig. 10.20 - Momento angular crítico l_{crit} como função do número de massa A . Na região hachurada são iguais as probabilidades de fissão e emissão de partículas [PL74].

de núcleo composto a partir de dois íons leves é praticamente igual à seção de choque de reação.

b) Fissão - Quando o núcleo composto é pesado o processo de fissão concorre fortemente com a evaporação de partículas em cada etapa desta. Um núcleo composto muito pesado com uma alta energia de excitação tem uma probabilidade muito baixa de chegar a um núcleo residual frio sem fissionar em alguma etapa da desexcitação. É fundamental também o papel desempenhado pelo momento angular l transmitido ao núcleo alvo. A barreira de fissão (ver seção 10.2) diminui com o aumento de l e para um valor crítico l_{crit} a barreira se anula. l_{crit} depende de A e essa dependência

é esboçada na figura 10.20. Um núcleo com momento angular maior do que l_{crit} sofre fissão imediata e veremos adiante que esse é também um fator limitante na produção de elementos superpesados.

c) Colisão fortemente inelástica - é um fenômeno característico de reações envolvendo núcleos bem pesados ($A \gtrsim 40$) e com uma energia incidente de 1 MeV a 3 MeV acima da barreira coulombiana. Nas DIC (do inglês *deep inelastic collisions*), projétil e alvo passam algum tempo sob ação mútua trocando massa e energia mas sem chegar a haver a formação de um núcleo composto. O projétil escapa depois de transferir parte de sua energia e momento angular para graus de liberdade internos dele e do alvo, podendo esses valores atingir 100 MeV e $50\hbar$. Essa propriedade dissipativa faz com que as DIC sejam também denominadas por muitos autores de *colisões dissipativas* ou *amortecidas*.

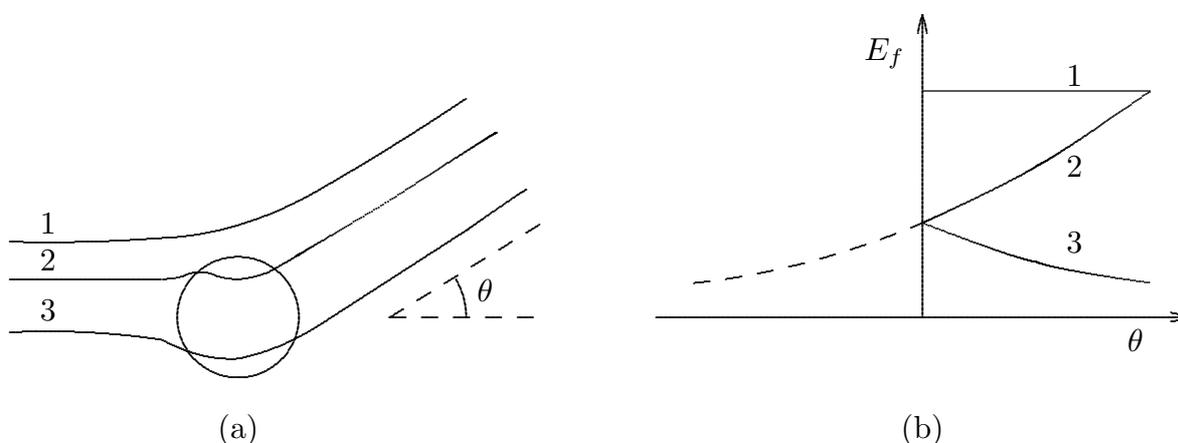


Fig. 10.21 - (a) Reações com parâmetros de impacto diferentes resultando no mesmo ângulo de espalhamento θ . (b) Linhas de máximos em um diagrama topográfico da energia final contra o ângulo de espalhamento.

Um dos aspectos mais interessantes das DIC é a correlação entre a energia dissipada na colisão e o ângulo de espalhamento no centro de massa. Observemos a figura 10.21a. A trajetória 1 mostra o projétil com um parâmetro de impacto que o coloca fora do alcance das forças nucleares. O ângulo de espalhamento coulombiano vai ser tanto maior quanto menor for o parâmetro de impacto. Em um gráfico como o da figura 10.21b, onde são plotados a energia final contra o ângulo de espalhamento, trajetórias do tipo 1 se situam no ramo superior, onde não há dissipação e a energia cinética inicial se mantém inalterada. Esse ramo superior tem um valor máximo para o ângulo de espalhamento; com um valor menor para o parâmetro de impacto que produziu esse máximo, começa a entrar em cena a força nuclear atrativa e os efeitos de dissipação da DIC. Um certo ângulo θ de espalhamento coulombiano pode ser também atingido pela combinação das forças nuclear e coulombiana. Só que agora há perda de energia e os eventos se situam no ramo 2 da figura 10.21b. Não há ainda correspondência bi-unívoca entre ângulo e energia pois uma infinidade de trajetórias com absorção pode ocorrer

conduzindo a um mesmo ângulo θ . O ramo 2 deve ser entendido como uma linha de máximos em uma representação topográfica (denominada *diagrama de Wilczynski*) onde o eixo perpendicular ao papel é proporcional à seção de choque $d^2\sigma/dE d\theta$.

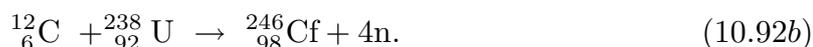
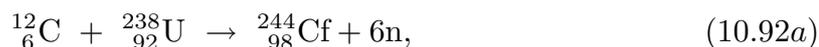
O mesmo ângulo θ pode ainda ser obtido pela trajetória 3, com um tempo de interação mais longo dos núcleos e uma maior dissipação. Como agora o projétil é desviado no sentido do núcleo, o ângulo de espalhamento seria formalmente $-\theta$ mas, como não há distinção experimental entre θ e $-\theta$, esses eventos aparecem como uma ramificação independente na parte de baixo do diagrama. Essa ramificação pode não estar presente se as massas dos núcleos forem muito grandes, devido a forte repulsão coulombiana entre eles. Com um aumento na energia, no entanto, ela tende a reaparecer.

Encerrando esta seção, vamos dar uma palavra sobre o uso de reações com íons pesados para a produção de elementos superpesados. O elemento mais pesado encontrado na natureza é o ${}^{238}_{92}\text{U}$. Ele é radioativo, mas sobreviveu desde sua formação nas explosões de supernovas (ver capítulo 12) por ter uma meia-vida de decaimento da ordem da idade da Terra. Elementos com número atômico maior (transurânicos) têm meias-vidas mais curtas e todos desapareceram. Eles foram recriados artificialmente através de reações nucleares usando como alvos elementos pesados já existentes ou elementos transurânicos criados anteriormente. Os projéteis foram inicialmente partículas leves: prótons, dêuterons, partículas-alfa e nêutrons. O uso de nêutrons se justifica porque a emissão β^- do núcleo composto aumenta o valor de Z e foi dessa forma [MA40] que o primeiro elemento transurânico, o Netúnio, foi obtido:



Reações com partículas leves puderam produzir isótopos até o mendeleiévio ($Z = 101$), mas com esse modo de produção não se é capaz de ir além; as meias-vidas por emissão-alfa ou fissão espontânea se tornam extremamente curtas quando se atinge essa região da tabela periódica, tornando impraticável a confecção de um alvo. A alternativa é colocar um elemento pesado sob um fluxo muito intenso de nêutrons. Isso pode ser feito usando reatores especiais de alto fluxo ou se analisando o material remanescente de explosões nucleares. Os elementos einsténio ($Z = 99$) e férmio ($Z = 100$) foram descobertos dessa última forma em 1955 mas a competição cada vez mais forte que o decaimento beta sofre do decaimento alfa e da fissão espontânea impede a formação de elementos de Z maior.

A partir de 1955 aceleradores de íons passaram a ter feixes com intensidade e energia suficientes para competir na produção de isótopos transurânicos. O primeiro resultado positivo foi a produção de dois isótopos do califórnio ($Z = 98$) pela fusão de núcleos de carbono e urânio:



A partir daí ficou aberta a possibilidade de se atingir diretamente o núcleo que se deseja criar pela fusão de dois núcleos menores adequadamente escolhidos. A dificuldade de tal empreitada é que as seções de choque para a produção de isótopos bem pesados são extremamente baixas. Como exemplo, a reação ${}^{50}_{22}\text{Ti} + {}^{208}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{257}_{104}\text{Db} + n$ tem uma seção de choque de 5 nb. Um pequeno aumento na carga ainda reduz drasticamente esse valor: a seção de choque para a reação de fusão ${}^{58}_{26}\text{Fe} + {}^{208}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{265}_{108}\text{Hn} + n$ é de 4 pb. Como comparação, as seções de choque típicas das DIC para núcleos pesados se situam na faixa 1-2 b.

Apesar do refinamento experimental que essas baixas seções de choque exigem, já se consegue produzir um isótopo tão pesado como o ${}^{277}_{112}$. A compreensão dos mecanismos que levam à fusão ainda é, no entanto, parcial. Segundo o modelo tradicionalmente aceito, a fusão de dois núcleos se dá em duas etapas: a formação de um núcleo composto e a desexcitação desse núcleo composto por evaporação de partículas, preferencialmente nêutrons. As dificuldades para a concretização do processo em núcleos muito pesados residem em ambas as etapas e serão discutidas resumidamente a seguir.

Quando dois núcleos leves estão em contacto a força nuclear atrativa supera a força coulombiana repulsiva e o destino final do sistema é a fusão. Em sistemas mais pesados ocorre o oposto e o projétil deve ter uma certa energia cinética mínima para penetrar no alvo. Na interpenetração dos núcleos uma quantidade apreciável dessa energia cinética é transferida para energia de excitação interna e isso tem um efeito equivalente a um aumento da barreira coulombiana. Um acréscimo na energia incidente, ou como se diz, um “empurrão-extra” (*extra-push*), é necessário para levar a fusão adiante. Efeitos de estrutura nuclear também podem estar presentes, favorecendo ou dificultando o processo.

Mas, um aumento na energia cinética do projétil está condicionado à sobrevivência do núcleo ao processo de desexcitação. Vimos que em cada etapa da emissão de nêutrons há a possibilidade de o núcleo fissionar e, se a energia de excitação for muito alta, digamos, uns 50 MeV, ela vai ser muito superior à barreira de fissão. Muito provavelmente a fissão ganhará a competição e a etapa final não será um núcleo residual frio de número atômico $Z = Z_1 + Z_2$ como queremos. Deve-se ter em mente também a limitação, já comentada, sobre o valor do momento angular l transferido ao núcleo: ele não pode ultrapassar l_{crit} , de modo que os valores de l permitidos se situam dentro de uma pequena janela em torno de $l = 0$. Em outras palavras, só colisões centrais têm alguma chance de produzir um núcleo composto que desexcite sem fissionar.

Uma orientação para a escolha do projétil e alvo mais adequados a produzir um dado núcleo deve vir do exame de um gráfico como o da figura 10.22, que mostra, como exemplo, o valor mínimo da energia de excitação do núcleo composto ${}^{258}_{104}\text{Db}^*$ criado a partir de diversas configurações projétil/alvo. Esse valor foi calculado [Og75] somando-se o valor negativo do Q da reação ao valor da barreira de interação $B = Z_1 Z_2 e^2 / [1,45(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})]$. Fica patente que projéteis em torno de $A = 50$ incidindo em alvos de Pb e Bi produzem a menor energia de excitação. Essa “fusão fria” tem uma maior probabilidade de se concretizar. A função de excitação para uma reação desse tipo é vista na figura 10.23, onde o elemento ${}_{104}\text{Db}$ é formado pelo bombardeio do ${}^{208}_{82}\text{Pb}$

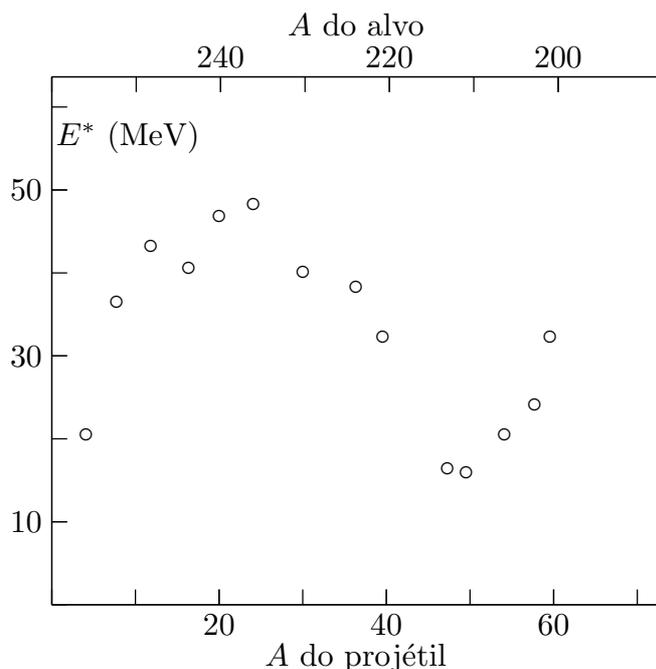
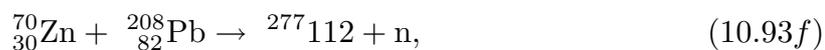
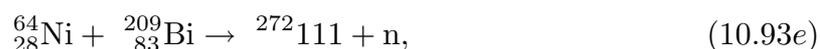
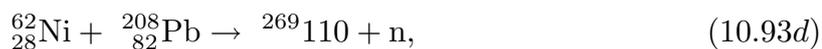
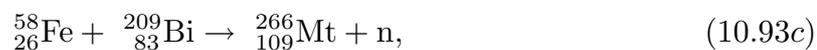
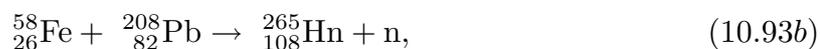
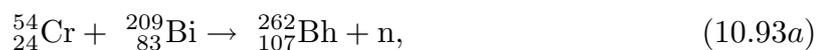


Fig. 10.22 - Energia de excitação mínima do núcleo composto ${}_{104}^{258}\text{Db}$ formado por diversas combinações projétil/alvo.

com ${}_{22}^{50}\text{Ti}$ [Ho96]. A probabilidade máxima de fusão com emissão de um ou nenhum nêutron ocorre para uma energia no centro de massa inferior à barreira coulombiana! Em um modelo que se pode criar para um evento típico dessa reação, o projétil tem uma colisão central com o alvo e pára diante deste antes de atingir o máximo da barreira coulombiana. A idéia é que nesse ponto as camadas externas estão em contacto e a transferência de núcleons entre projétil e alvo pode diminuir a barreira coulombiana e permitir sua ultrapassagem.

As condições favoráveis proporcionadas pelo método da fusão fria fazem com que, para a criação dos elementos mais pesados, se prefira esse tipo de reação a reações com alvos de actínídeos e projéteis menores. De fato, foi através das reações



que pela primeira vez foram sintetizados isótopos de elementos de $Z = 107$ a $Z = 112$ [Ar85, Ho96], o primeiro da lista em 1976 e o último em 1996. Apesar disso, reações com alvos de actínídeos não foram abandonadas. Em 1996, Lazarev e colaboradores [La96] conseguiram sintetizar o isótopo $^{273}110$, bombardeando ^{244}Pu com íons de ^{34}S . O isótopo $^{273}110$ foi obtido a partir da evaporação de 5 nêutrons de um núcleo de $^{278}110$ excitado com aproximadamente 50 MeV. A seção de choque determinada para o processo foi de 0,4 pb!

Fig. 10.23 - Função de excitação para a produção de $_{104}\text{Db}$ a partir da fusão de ^{208}Pb com ^{50}Ti . A seta indica o valor da barreira de interação, como calculada por Bass [Ba74].

O próximo passo importante na síntese de elementos pesados é a produção do elemento de $Z = 114$. Cálculos teóricos [Sm95], baseados no método de Strutinsky (ver seção 11.7), preveem uma maior estabilidade para núcleos situados em torno de $Z = 108$, $N = 162$ e $Z = 114$, $N = 178$. A primeira previsão tem sido confirmada pelos dados experimentais sobre o elemento 108 mas a segunda aguarda a síntese de isótopos do elemento 114. Um primeiro resultado nesse sentido foi anunciado em janeiro de 1999 por uma equipe de físicos russos e americanos trabalhando no laboratório de Dubna, Rússia. Eles anunciaram [Og99] com 98% de confiança que observaram um (!) evento da reação $^{48}_{20}\text{Ca} + ^{244}_{94}\text{Pu} \rightarrow ^{289}_{114} + 3n$. Novos experimentos serão necessários para obter dados mais concretos do elemento, mas o tempo de vida medido nesse evento (30 s!) fornece uma primeira confirmação experimental de uma estabilidade especial para núcleos com $Z = 114$.

10.10 - Excitação Coulombiana

A excitação coulombiana é um processo de espalhamento inelástico em que uma partícula carregada transmite energia de excitação ao núcleo através do campo eletromagnético. Esse processo pode ocorrer com uma energia bem mais baixa do que a necessária para a partícula vencer a barreira coulombiana; a força nuclear está, desse modo, excluída do processo.

O tratamento mais simples que se pode dar ao problema é fazer um cálculo semi-clássico, onde a partícula incidente descreve uma trajetória bem definida, que é a trajetória hiperbólica clássica de um espalhamento de Rutherford. A probabilidade de excitar o núcleo para um estado f acima do estado fundamental i é obtida pelo mesmo tratamento desenvolvido na seção 5.8 para os decaimentos radioativos. Assim,

$$a_{if} = -\frac{i}{\hbar} \int V_{if} e^{i\omega t} dt, \quad (5.46)$$

com $\omega = (E_f - E_i)/\hbar$, é a amplitude de probabilidade de haver a transição $i \rightarrow f$. O elemento de matriz

$$V_{if} = \int \Psi_f^* V \Psi_i d\tau \quad (5.44)$$

contém o potencial V de interação da partícula incidente com o núcleo. O quadrado de a_{if} mede a probabilidade de transição de i para f e essa probabilidade deve ser integrada ao longo da trajetória.

Um cálculo simples pode ser feito no caso da excitação do estado fundamental $J = 0$ de um núcleo deformado para um estado excitado $J = 2$ como resultado de uma colisão frontal com ângulo de espalhamento $\theta = 180^\circ$. A perturbação V vem, nesse caso, da interação da carga ze do projétil com o momento de quadrupolo do núcleo alvo. Esse momento de quadrupolo está inserido em um operador e deve funcionar também como um operador que atua entre os estados inicial e final. A forma de adaptar (3.26) e (3.27) é escrevendo

$$V = \frac{1}{2} \frac{ze^2 Q_{if}}{r^3}, \quad (10.94)$$

com

$$Q_{if} = \sum_i \int \Psi_f^* (3z_i^2 - r_i^2) \Psi_i d\tau, \quad (10.95)$$

onde a soma se estende a todos os prótons. A amplitude se escreve então

$$a_{if} = \frac{ze^2 Q_{if}}{2i\hbar} \int \frac{e^{i\omega t}}{r^3} dt. \quad (10.96)$$

Em um espalhamento de $\theta = 180^\circ$ existe uma relação entre a separação r , a velocidade v , a velocidade inicial v_0 e a distância de aproximação máxima s :

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm v_0 \left(1 - \frac{s}{r}\right), \quad (10.97)$$

que se obtém facilmente da conservação de energia. Além disso, se a energia de excitação for pequena, podemos admitir que o fator $e^{i\omega t}$ em (10.96) não varia muito durante o

tempo em que o projétil está próximo do núcleo. Assim, esse fator pode ser colocado fora da integral e não contribui para a seção de choque. Ficamos com:

$$a_{if} = \frac{ze^2 Q_{if}}{2i\hbar v_0} \times 2 \int \frac{dr}{r^3(1-s/r)^{1/2}}. \quad (10.98)$$

A integral se resolve facilmente pela substituição $u = 1 - s/r$, no que resulta:

$$a_{if} = \frac{4ze^2 Q_{if}}{3i\hbar v_0 s^2} = \frac{4Q_{if} E^2}{3ze^2 \hbar v_0 Z^2}, \quad (10.99)$$

onde se usou a conservação de energia, $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = zZe^2/s$, sendo m a massa do projétil e Z o número atômico do alvo. A seção de choque diferencial é dada pelo produto da seção de choque diferencial do espalhamento de Rutherford a 180° pela probabilidade de transição ao longo da trajetória, medida pelo quadrado de a_{if} :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\theta=180^\circ} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega} \Big|_{\theta=180^\circ} \times |a_{if}|^2. \quad (10.100)$$

A seção de choque diferencial do espalhamento de Rutherford é a expressão clássica

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4E} \right)^2 \text{cosec}^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (10.101)$$

e, para $\theta = 180^\circ$, obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\theta=180^\circ} = \frac{mE|Q_{if}|^2}{18\hbar^2 Z^2}, \quad (10.102)$$

expressão que é independente da carga do projétil. Ela é, por outro lado, proporcional à massa do projétil, indicando que íons pesados são mais eficazes para a produção de excitação coulombiana.

O operador momento de quadrupolo Q_{if} emprega, como vimos, as funções de onda Ψ_i e Ψ_f dos estados inicial e final. Se essas duas funções de onda forem semelhantes, como é o caso de uma excitação ao primeiro nível de uma banda rotacional, o operador Q_{if} pode ser substituído pelo momento de quadrupolo intrínseco Q . A expressão (10.102) traduz, assim, a possibilidade de se avaliar o momento de quadrupolo a partir de uma medição de um valor da seção de choque.

10.11 - Reações Foto-nucleares - Ressonâncias Gigantes

Uma reação foto-nuclear é uma reação resultante da interação da radiação eletromagnética com o núcleo ou, mais especificamente, com os prótons do núcleo.

A dificuldade essencial no estudo desse tipo de reação é obter um feixe de fótons mono-energéticos com intensidade alta. Por isso, os primeiros trabalhos usavam primordialmente fótons de *bremstrahlung* (radiação proveniente de frenagem de partículas carregadas). Essa radiação tem uma distribuição contínua de energias, desde zero até a energia das partículas incidentes que a produziram. O estudo do comportamento de uma reação para uma dada energia E dos fótons é obtida pela subtração de duas exposições, com energias E e $E + \Delta E$.

Quando a energia dos fótons se situa pouco acima da energia de separação de um núcleon, a seção de choque de foto-absorção revela a presença de ressonâncias agudas características. Mas, quando a energia incidente alcança a faixa de 15-25 MeV, surge um comportamento inteiramente novo na seção de choque, com a presença de um pico muito grande e largo, a chamada *ressonância gigante de dipolo elétrico*.

Os primeiros indícios da presença de uma ressonância gigante surgiram no trabalho de W. Bothe e W. Gentner [BG37], que usaram fótons de 17,6 MeV da reação ${}^7\text{Li}(p,\gamma)$ em diversos alvos. Baldwin e Kleiber [Bk47,48] confirmaram essas observações com fótons de um betatron. A figura 10.24 mostra a função de excitação de fotoabsorção do ${}^{120}\text{Sn}$ em torno da ressonância gigante de dipolo elétrico em 15 MeV.

Fig. 10.24 - Ressonância gigante na absorção de fótons pelo ${}^{120}\text{Sn}$ [Le74].

A ressonância gigante ocorre em núcleos ao longo de toda a tabela periódica com a energia de ressonância decrescendo com A sem grandes oscilações (ver figura 10.25) a partir de $A = 20$. Isso mostra que a ressonância gigante é uma propriedade da matéria nuclear e não um fenômeno característico de certo tipo de núcleo. As larguras das ressonâncias ficam quase todas na faixa entre 3,5 MeV e 5 MeV, podendo chegar a 7 MeV em alguns poucos casos.

A primeira proposta de explicação da ressonância veio de Goldhaber e Teller em 1948 [GT48]. O fóton, através da atuação de seu campo elétrico sobre os prótons, leva

o núcleo para um estado excitado onde o conjunto de prótons oscila em oposição de fase contra o conjunto de nêutrons. Nessa oscilação, esses conjuntos se interpenetram, sendo mantida a incompressibilidade de cada um deles separadamente. Um cálculo clássico usando essa hipótese levou a uma frequência de vibração que varia com o inverso da raiz quadrada do raio nuclear, ou seja, a energia de ressonância varia com $A^{-1/6}$.

Posteriormente, H. Steinwedel e J. H. Jensen [SJ50] desenvolveram o estudo clássico de uma outra forma de oscilação, já cogitada por Goldhaber e Teller, em que a incompressibilidade é abandonada. Os núcleons se movem dentro de uma cavidade esférica fixa com a densidade de prótons e nêutrons sendo uma função da posição e do tempo. Os núcleons da superfície têm posição fixa uns em relação aos outros e a densidade é escrita de tal forma que, em um dado instante, o excesso de prótons de um lado do núcleo coincide com a falta de nêutrons nesse mesmo lado, e vice-versa. Um tal modelo conduz a uma variação da energia de ressonância com $A^{-1/3}$.

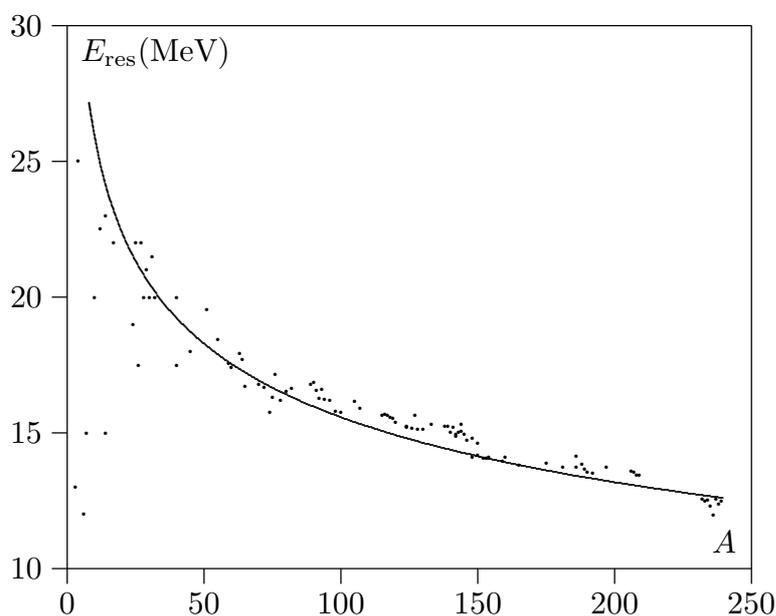


Fig. 10.25 - Localização da energia da ressonância gigante de dipolo elétrico dada por (10.103)(curva contínua) comparada com pontos experimentais [DB88].

O comportamento da energia da ressonância gigante de dipolo E_{RGD} não se enquadra exatamente em nenhum dos dois casos. Mas, um cálculo como o desenvolvido na referência [MS77], que admite a contribuição dos dois modelos, é capaz de chegar a uma expressão para E_{RGD} em função do número de massa A ,

$$E_{\text{RGD}}(\text{MeV}) = 112 / \left[A^{2/3} + (A_0 A)^{1/3} \right]^{1/2}, \quad (10.103)$$

onde $A_0 \cong 274$, que, com a exceção de alguns núcleos muito leves, reproduz muito bem o comportamento dos valores experimentais, como podemos ver na figura 10.25. Um

exame da equação (10.103) mostra que o modo de Gamow-Teller predomina largamente em núcleos leves, onde a contribuição do modo de Steinwedel-Jensen é desprezível. Essa última aumenta gradativamente com A mas só chega a ser predominante ao final da tabela periódica, em $A = A_0$.

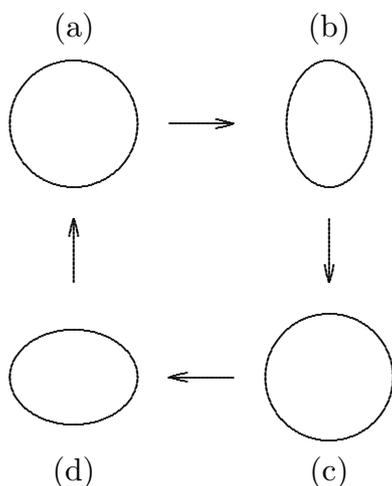


Fig. 10.26 - Quatro quartos de ciclo de uma vibração quadrupolar gigante. Na ressonância isoescalar, prótons e nêutrons vibram em fase, na ressonância isovetorial, em oposição de fase. Nessa última, quando a figura para os prótons é a (b), para os nêutrons é a (d), e viceversa.

A ressonância gigante de dipolo elétrico provém de uma excitação que transmite 1 unidade de momento angular ao núcleo ($\Delta l = 1$). Se o núcleo é par-par ele é levado a um estado 1^- . O que se verifica é que a transição também muda o isospin de 1 unidade ($\Delta T = 1$) e, por conta disso, ela é tida como uma *ressonância isovetorial*. Durante muitos anos essa foi a única ressonância gigante conhecida. Na década de 70, ressonâncias gigantes isoescalares ($\Delta T = 0$) de quadrupolo elétrico ($\Delta l = 2$) [PW71] e monopolo elétrico ($\Delta l = 0$) [Ma75] foram observadas em reações com partículas carregadas. A primeira tem semelhança com o estado vibracional de quadrupolo criado pela aborção de um fônon de $\lambda = 2$, estudado na seção 4.8, por ambos serem, em núcleos par-par, estados de vibração 2^+ . Mas a ressonância gigante de quadrupolo tem uma frequência e, conseqüentemente, uma energia, muito maior. Essa energia de ressonância, da mesma forma que a de dipolo, decresce suavemente com A , obedecendo à fórmula aproximada

$$E_{\text{RGQ}}(\text{MeV}) \cong 62A^{-1/3}. \quad (10.104)$$

Nas ressonâncias gigantes de quadrupolo elétrico o núcleo oscila entre a forma esférica (supondo ser essa a forma do estado fundamental) e elipsoidal. Se prótons e

nêutrons atuam em fase para esse fim, temos uma ressonância isoescalar ($\Delta T = 0$) e se atuam em oposição de fase a ressonância é isovetorial ($\Delta T = 1$). A figura 10.26 ilustra esses dois possíveis modos de vibração. A existência de ressonâncias quadrupolares elétricas isoescalares está firmemente estabelecida com um grande número de casos medidos. Para a ressonância quadrupolar elétrica isovetorial a situação é bem mais incerta mas já existem vários trabalhos em que sua medição é anunciada.

A ressonância gigante de monopolo é um modo muito especial de excitação nuclear onde o núcleo se contrai e expande radialmente, mantendo a forma original mas alterando o volume. É chamado também de *modo de respiração*. Ele também pode ocorrer nas formas isoescalar e isovetorial. É um modo importante para se estudar a compressibilidade da matéria nuclear. Novamente aqui, a forma isoescalar tem um número razoável de casos medidos, a localização da energia de ressonância sendo dada pela expressão aproximada

$$E_{\text{RGM}}(\text{MeV}) \cong 80A^{-1/3}. \quad (10.105)$$

Em 1996 foi apresentada evidência da existência de uma ressonância gigante dipolar elétrica isoescalar, usando o espalhamento de partículas alfa de 200 MeV no ^{208}Pb [Da96]. Resultados de observações de ressonâncias gigantes de octupolo também já foram publicados.

Além das ressonâncias gigantes elétricas, associadas a uma variação da forma do núcleo, existem ressonâncias gigantes magnéticas, envolvendo o que se chama de *vibrações de spin*. Nestas, núcleons com o spin para cima movem-se fora de fase com núcleons com spin para baixo. O número de núcleons envolvidos no processo não pode ser muito grande pois é limitado pelo Princípio de Pauli.

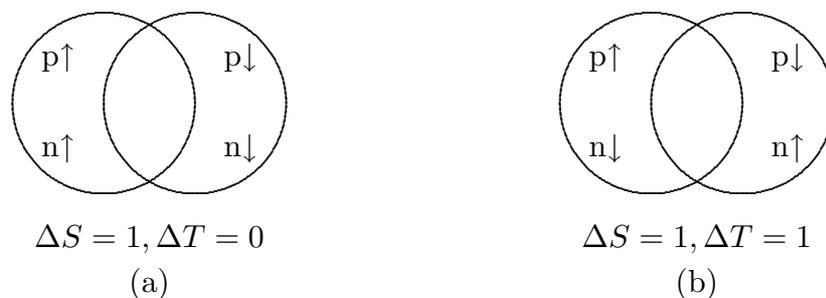


Fig. 10.27 - Ressonâncias de dipolo magnético: a) isoescalar b) isovetorial.

As ressonâncias magnéticas podem também se separar em ressonâncias isoescalares, onde prótons nêutrons de um mesmo spin vibram contra prótons e nêutrons de spin oposto, e isovetoriais, onde prótons de spin para cima e nêutrons de spin para baixo vibram contra seus correspondentes com spins opostos. Essas últimas, quando oriundas de reações com troca de carga, são também chamadas de *ressonâncias gigantes de Gamow-Teller*. A figura 10.27 mostra um diagrama esquemático dos dois tipos de

ressonância magnética para vibrações de dipolo. Ressonâncias magnéticas de monopolo e quadrupolo também já foram observadas.

Um outro aspecto importante do estudo das ressonâncias gigantes é a possibilidade de elas serem induzidas em núcleos já excitados. Essa possibilidade foi analisada teoricamente por D. M. Brink e P. Axel [Ax62] para ressonâncias gigante “montadas” em núcleos girando com alto momento angular, resultando a proposição de que a frequência e outras propriedades das ressonâncias gigantes não são afetadas pela excitação. Uma série de experiências na década de 80 (ver referência [BB86]) deram suporte a essa hipótese.

Um caso especial ocorre quando o estado excitado onde a ressonância gigante é montada é ele mesmo uma ressonância gigante. Entendendo a excitação de uma ressonância gigante como o resultado da absorção de 1 fônon, podemos ver essas ressonâncias gigantes duplas como estados de excitação com 2 fônons de vibração. A ressonância gigante dipolar dupla foi observada a primeira vez em reações com dupla troca de carga induzidas por com píons no ^{32}S [Mo88]. Posteriormente, novos casos foram medidos, tanto em espalhamento de píons como em colisões de núcleos pesados [Be98].

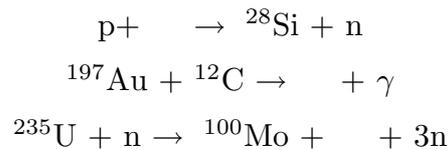
Ressonâncias gigantes duplas podem existir, naturalmente, para outras multipolaridades e sua observação é esperada à medida que as dificuldades experimentais relacionadas às altas energias de excitação forem sendo superadas. Outra possibilidade é a observação de uma ressonância gigante tripla. As dificuldades, nesse caso, são ainda maiores, mas propostas para uma tal empreitada já foram delineadas [Bl96].

Sugestões para Leitura

- Um livro acessível sobre reações nucleares é o de G. R. Satchler, “Introduction to Nuclear Reactions”, Wiley, New York, 1980.
- De nível algo mais alto é o livro de D. F. Jackson, “Nuclear Reactions”, Methuen, London, 1970.
- Um tratamento avançado sobre reações diretas pode ser visto no livro de W. Tobocman, “Theory of Direct Nuclear Reactions”, Oxford, 1961.
- Reações com íons pesados podem ser estudadas com detalhes no livro de R. Bass, “Nuclear Reactions with Heavy Ions”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- Sobre excitação coulombiana são tradicionais as referências ao artigo de K. Alder et al., Rev. Mod. Phys. **28** (1956) 432 e aos livros de K. Alder e A. Winther, “Coulomb Excitation”, Academic, New York, 1966 e “Electromagnetic Excitation”, North-Holland, Oxford, Amsterdam, 1975.
- Informações adicionais sobre ressonâncias gigantes podem ser encontradas nos artigos de George F. Bertsch e Ricardo Broglia, “Giant Resonances in Hot Nuclei”, *Physics Today*, agosto de 1986, pag. 44 e de Elisa Wolyneć, “Ressonâncias Nucleares Gigantes”, *Ciência Hoje*, **39** (1988) 34.

Exercícios

1 - Complete as reações



2 - Que spins e paridades podem ser esperados no ${}^{20}\text{Ne}$ formado pela reação $\alpha + {}^{16}\text{O}$?

3 - Obtenha o limiar para a produção de ${}^{10}\text{B}$ na reação da figura 10.2 para os ângulos de espalhamento a) 0° e b) 60° . Verifique se os resultados são compatíveis com os valores da figura.

4 - a) Escreva uma expressão relativista que relacione a energia no SCM com a energia no SL para um sistema de duas partículas, a segunda em repouso no SL. b) Mostre que se a energia da partícula incidente no SL for o valor T_l dado por (10.22), a energia cinética total no SCM depois da colisão é nula, mostrando que T_l é a energia limiar da reação.

5 - Descreva o que ocorre no diagrama da figura 10.4 quando a energia da partícula incidente é igual: a) à energia limiar; b) à energia E'_a (equação (10.17)). Utilizando ainda o diagrama, diga porque a duplicidade de energias não ocorre em reações endoérgicas.

6 - Determine a equação da curva da figura 10.5.

7 - Verifique o quanto as curvas da figura 10.7 se assemelham ao caso da difração da luz por um objeto opaco, calculando as quantidades $\Delta\theta = \pi/kR$ que, em uma difração de Fraunhofer, medem, para os primeiros máximos, as distâncias angulares entre dois máximos consecutivos.

8 - Nas reações (10.42), a) qual é a energia de excitação do ${}^{64}\text{Zn}^*$ quando ele é formado pela colisão de prótons de 13 MeV com o ${}^{63}\text{Cu}$? b) Que energia devem ter partículas- α colidindo com o ${}^{60}\text{Ni}$ para produzir a mesma energia de excitação? Compare o resultado com o da figura 10.8. c) Que percentagem da energia cinética das partículas incidentes contribui para a energia de excitação do Zn?

9 - Quando a reação $p + {}^{65}\text{Cu} \rightarrow {}^{65}\text{Zn} + n$ é produzida por prótons de 15 MeV, observa-se uma distribuição contínua de energias dos nêutrons emergentes, na qual se sobrepõe um pico agudo na energia $E_n = 5,57$ MeV, associado a uma energia de excitação de 7,3 MeV do ${}^{65}\text{Zn}$. Que modelos podem ser usados para justificar esse resultado?

10 - Mostre que na captura de nêutrons lentos a seção de choque total na energia de ressonância tem o valor $\sigma = \lambda\sqrt{g\sigma_e/\pi}$, sendo σ_e a seção de choque de espalhamento na mesma energia e g o fator estatístico da fórmula de Breit-Wigner.

11 - Mostre que a perda de fluxo de um feixe de partículas situado em uma região onde existe um potencial complexo $U(\mathbf{r})$ é dada por

$$\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\hbar} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \text{Im} [U(\mathbf{r})]$$

12 - Estude o comportamento dos máximos das funções esféricas de Bessel $j_n(x)$ em uma referência como [AS72] e verifique o quanto (10.81) descreve corretamente a posição dos picos da figura 10.17.

13 - O texto referente à tabela 10.1 justifica os valores encontrados para o momento angular orbital das reações mostradas na primeira linha. Faça a mesma análise para alguma outra linha da tabela.

14 - Construa uma reação em que um projétil de $A = 20$ produza o núcleo composto ${}_{104}^{258}\text{Db}^*$. Usando a expressão aproximada para a barreira coulombiana, $B_c = Z_1 Z_2 e^2 / 1,45(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$, determine a menor energia de excitação possível para o núcleo composto. Repita o procedimento para um projétil de $A = 50$ e compare os resultados com os da figura 10.22.

APÊNDICE A

Núcleos Exóticos

A física nuclear teórica prevê a existência de cerca de 6000 núcleos atômicos. Destes, apenas 2000 foram identificados experimentalmente e apenas 284 são elementos estáveis. A dificuldade experimental deve-se à alta instabilidade de grande parte desses núcleos, muitos deles tendo um tempo de vida de decaimento radioativo da ordem de milissegundos, ou menos.

Núcleos como esses, altamente instáveis, são produzidos no laboratório, utilizando-se a técnica de fragmentação nuclear: um feixe de núcleos estáveis, como por exemplo, o ^{16}O ou o ^{208}Pb , é acelerado em altas energias e atirado contra um alvo fixo. As reações nucleares produzem uma série de fragmentos, entre os quais muitos núcleos altamente instáveis e longe da linha de estabilidade- β (*exóticos*). Estes núcleos não podem ser aglomerados em um alvo para serem estudados. Eles são separados dos outros fragmentos por magnetos e acelerados novamente, formando assim um feixe de núcleos exóticos. Este feixe é a seguir utilizado para induzir reações em outros alvos. Tudo isto é feito no pequeno intervalo de tempo em que os núcleos instáveis ainda não tenham decaído. Do estudo destas colisões se aprende muita coisa sobre a estrutura e sobre as reações induzidas por eles.

O estudo de núcleos exóticos está apenas na sua infância. É uma área em física nuclear que se iniciou praticamente por volta de 1985. Propriedades interessantes de núcleos exóticos são enumeradas a seguir.

- (a) Núcleos exóticos leves têm freqüentemente uma distribuição de matéria que apresenta uma *auréola* em torno de um carôço central denso. Este é um fenômeno inexistente em núcleos normais.
- (b) O conhecimento da força entre duas partículas é apenas o primeiro passo para se entender o comportamento de um sistema de muitas partículas. Já o sistema de três partículas apresenta inúmeras surpresas de estrutura, e é um problema de razoável complexidade. Recentemente, foi descoberta uma propriedade até então desconhecida de um sistema de três corpos: a de que certos núcleos instáveis, como o ^{11}Li funcionam como *Anéis de Borromeo*, um brinquedo formado por três anéis interconectados que possuem a propriedade de que se um anel for quebrado, todos eles se separam. Eles são o símbolo heráldico da Casa dos Borromeos, no norte da Itália, daí vindo seu nome.
- (c) A energia de ligação de um núcleo se modifica drasticamente em função do número de massa, A , o que freqüentemente induz ao desenvolvimento de aglomerados (*clusters*). O estudo de aglomerados tem se limitado praticamente à existência de partículas- α nos núcleos. No entanto, em núcleos leves instáveis a região da superfície é de baixa densidade, o que possibilita o aparecimento de outros tipos de aglomerados. Um bom exemplo são os núcleos ^6He e de ^8He . Outro fato interessante, é que núcleos com $A/Z = 3$ podem formar *polímeros nucleares*, uma longa cadeia de aglomerados alinhados.
- (d) Conhecem-se hoje núcleos com várias formas. Orbitais exóticos aparecem em regiões longe da linha de estabilidade nuclear, induzindo muitos tipos de deformações. Até núcleos em forma de bananas podem existir.

- (e) A existência de elementos superpesados, com $Z > 100$, é campo de grande interesse acadêmico, industrial e bélico. A utilização de feixes de núcleos exóticos está dando origem a uma verdadeira corrida experimental para a detecção de novos elementos.
- (f) A matéria nuclear simétrica, a matéria neutrônica e a matéria de uma supernova têm sido estudadas a partir da extrapolação do que se conhece da matéria nuclear em condições normais. No entanto, estas extrapolações são muito grandes. Estudos de núcleos exóticos proporcionarão o conhecimento das propriedades da matéria nuclear longe da linha de estabilidade- β e também indicará uma nova maneira de se relacionar matérias nucleares em condições diversas.
- (g) Modos de vibração coletivas (ressonâncias gigantes) com energias muito baixas, e de diversas multipolaridades, são possíveis de se estudar com núcleos exóticos contendo uma *auréola*. Essas ressonâncias nos proporcionarão um meio de estudar a compressibilidade e outras propriedades da matéria nuclear assimétrica.
- (h) A produção de elementos no Universo depende das probabilidades de captura rápida de prótons e de nêutrons em vários sítios estelares. O estudo de núcleos exóticos é essencial para se entender a abundância de vários elementos no Universo.

Sugestões para leitura

- “Núcleos Exóticos”, C.A.Bertulani, *Ciência Hoje* **11** (1990) 60
- “The Structure and Reactions of Neutron-Rich Nuclei”, C.A. Bertulani, L.F. Canto and M.S. Hussein, *Physics Reports* **226** (1993) 281
- “Exotic Atomic Nuclei”, J. H. Hamilton e J. A. Maruhn, *Scientific American* **255**, julho de 1986, pag.74

APÊNDICE B

Frequência do Oscilador Harmônico no Modelo de Camadas

Vamos estimar o valor da frequência ω do oscilador harmônico adequado a um núcleo de número atômico A .

Para o oscilador harmônico o valor esperado da energia cinética em um dado estado é igual ao valor esperado da energia potencial. Logo, a soma das energias dos estados ocupados para um núcleo de massa a é

$$E = m\omega^2 A \langle r^2 \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Podemos fazer uma estimativa de $\langle r^2 \rangle$ por

$$\langle r^2 \rangle \cong \frac{3}{5} R^2, \quad (\text{B.2})$$

com $R \cong 1,2A^{\frac{1}{3}}$. Supondo $N = Z$ e que todos os estados até uma energia E_Λ estejam ocupados, obtemos que

$$A = \sum_{\Lambda=0}^{\Lambda_0} 2N_\Lambda = \frac{2}{3}(\Lambda_0 + 1)(\Lambda_0 + 2)(\Lambda_0 + 3) \cong \frac{2}{3}(\Lambda_0 + 2)^2 + \text{termos de ordem}(\Lambda_0) \quad (\text{B.3})$$

e

$$\frac{E}{\hbar\omega} = \sum_{\Lambda=0}^{\Lambda_0} 2N_\Lambda \left(\Lambda + \frac{3}{2}\right) \cong \frac{1}{2}(\Lambda_0 + 2)^4 - \frac{1}{3}(\Lambda_0 + 2)^3 + \dots \quad (\text{B.4})$$

Eliminando $(\Lambda_0 + 2)$ das equações acima e mantendo os termos de ordem superior em $(\Lambda_0 + 2)$, obtemos

$$\frac{E}{\hbar\omega} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}A\right)^{\frac{4}{3}}. \quad (\text{B.5})$$

Usando (B.1) e (B.2) encontramos

$$\hbar\omega \cong 41A^{-\frac{1}{3}} \text{ MeV}. \quad (\text{B.6})$$

As ressonâncias gigantes de dipolo são excitações com $\Delta l = \pm 1$ (ver capítulo 10). A posição do pico varia com a massa do núcleo como $A^{-\frac{1}{3}}$, sendo um bom exemplo de aplicação da proporcionalidade (B.6).

Referências

- [Ab94] F. Abe et al, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 2966.
- [An32] C. D. Anderson, *Science* **76** (1932) 238.
- [Ad50] R. K. Adair, *Rev. Mod. Phys.* **22** (1950) 249.
- [AN36] C. D. Anderson e S. H. Neddermeyer, *Phys. Rev.* **50** (1936) 270.
- [Ar85] P. Armbruster, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **35** (1985) 135.
- [Ar85] P. Armbruster e col., *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 406.
- [Ar96] R. Arnold et al, *Z. Phys.* **C72** (1996) 239.
- [AS72] M Abramowitz e I. A. Stegun (eds.), “Handbook of Mathematical Functions”, Dover, New York, 1972.
- [AW95] G Audi e A. H. Wapstra, *Nucl. Phys.* A595 (1995) 409.
- [Ax62] P. Axel, *Phys. Rev.* **126** (1962) 671.
- [Ba10] H. Bateman, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **15** (1910) 423.
- [Ba57] J. Bardeen, L. N. Cooper e R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [Ba74] R. Bass, *Nucl. Phys.* A231 (1974) 45.
- [Ba89] J.N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [Ba96] R. M. Barnett et al, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1
- [BB30] W. Bothe e H. Becker, *Z. Phys.* **66** (1930) 289; *Naturwissenschaften* **19** (1931) 753.
- [BB86] G. F. Bertsch e R. A. Broglia, *Physics Today* **39 #8**, August (1986).
- [Be38] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* 55 (1938) 103 e 403.
- [Be49] L. A. Beach, C. L. Peacock e R. G. Wilkinson, *Phys. Rev.* **76** (1949) 1624.
- [Be72] K. E. Bergkvist, *Nucl. Phys.* **B39** (1972) 317.
- [Be79] H.A. Bethe, G. Brown, J. Applegate e J.M. Lattimer, *Nucl. Phys.* A324 (1979) 487.
- [Be98] C. A. Bertulani, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys* **24** (1998) 1165.
- [BD64] J. D. Bjorken e S. D. Drell, “Relativistic quantum mechanics”, Mc Graw-Hill, NY, 1964.
- [BG37] W. Bothe e W. Gentner, *Z. Phys.* **106** (1937) 236
- [BG77] P. J. Brussaard e P. W. M. Glaudemans, ”Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy”, North-Holland, 1977.
- [Bh52] A. B. Bhatia, Kun Huang, R. Huby e H. C. Newns, *Phil. Mag.* **43** (1952) 485.
- [BK47] G. G. Baldwin e G. S. Kleiber, *Phys. Rev.* **71** (1947) 3; *Phys. Rev.* **73** (1948) 1156.
- [Bl96] Y. Blumenfeld, *Nucl. Phys.* **A599** (1996) 289c.
- [Bo13] N. Bohr, *Phil. Mag.* **26** (1913) 1, 476 e 847.
- [Bu57] E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, W. Fowler and W.A. Hoyle, *Rev. Mod. Phys.* 29 (1957) 547.
- [BW52] J. M. Blatt e V. F. Weisskopf, “Theoretical Nuclear Physics”, Wiley, New York, 1952.
- [CG28] E. U. Condon e R. W. Gurney, *Nature* **122** (1928) 439; *Phys. Rev.* **33** (1929) 127.

- [Ch31] S. Chandrasekhar, *Ap. J.* **74** (1931) 81.
- [Ch32] J. Chadwick, *Nature* **129** (1932) 312.
- [Ch64] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch e R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 138.
- [Ch80] L. M. Chirovsky et al, *Phys. Lett* **B94** (1980) 127.
- [Ch84] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.* **56** (1984) 121.
- [CJ32] M. Curie e F. Joliot, *C. R. Acad. Sci.* **194** (1932) 273, 708, 876, 2208.
- [CL56] B. Cork, G. R. Lambertson, O. Piccioni e W. A. Wenzel, *Phys. Rev.* **104** (1956) 1193.
- [Da96] B. F. Davis et al, *Nucl. Phys.* **A599** (1996) 277c.
- [DB88] S. S. Dietrich e B. L. Berman, *At. Data and Nucl. Data Tables* **38** (1988) 199.
- [En66] H. A. Enge, "Introduction to Nuclear Physics", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
- [Fe34] E. Fermi, *Z. Phys.* **88** (1934) 161.
- [Fe53] H. Feshbach, C. E. Porter e V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **90** (1953) 166L.
- [FR49] J. L. Fowler e L. Rosen, *Phys. Rev.* **72** (1947) 926.
- [FT50] E. Feenberg e G. Trigg, *Rev. of Mod. Phys.* **22** (1950) 399.
- [Ga28] G. Gamow, *Z. Phys.* **51** (1928) 204.
- [Ge53] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **92** (1953) 833.
- [Ge64] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214.
- [GL48] E. Gardner e C. M. Lattes, *Science* **107** (1948) 270.
- [Gl70] S. L. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1285.
- [Gl80] S. Glashow et al., *Nobel Lectures in Physics, Rev. Mod. Phys.* **55** (1990) 515.
- [GN11] H. Geiger e J. M. Nuttall, *Phil. Mag.* **22** (1911) 613.
- [Go50] S. N. Goshal, *Phys. Rev.* **80** (1950) 939.
- [GS51] M. Goldhaber e A. W. Sunyar, *Phys. Rev.* **83** (1951) 906.
- [GT48] M. Goldharber e E. Teller, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1046.
- [Ha40] O. Haxel, J. D. Jensen e H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75** (1949) 16.
- [Ha65] S. M. Harris, *Phys. Rev.* **138** (1965) B509.
- [Ha65] A. Johnson, H. Ryde e S. A. Hjorth, *Nucl. Phys.* **A179** (1972) 753.
- [He25] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **33** (1925) 879.
- [He32] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **77** (1932) 48.
- [HH29] W. Heitler e G. Hertzberg, *Naturwissenschaften* **17** (1929) 673.
- [Ho46] F. Hoyle, *The synthesis of elements from hydrogen*, M.N.R.A.S. 106 (1946) 343.
- [Ho57] R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** (1957) 231.
- [Ho62] R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **12** (1962) 435.
- [Ho71] T. L. Houk, *Phys. Rev.* **C3** (1971) 1886.
- [Ho96] S. Hofmann, *Nucl. Phys. News* **6** (1996) 26.
- [Hy71] E. K. Hyde, *The Nuclear Properties of the Heavy Elements*, vol. 3: Fission Phenomena, 1971. Dover Publications, Inc., New York.
- [Ib51] I. Iben, *Ap. J.* **141** (1965) 993.
- [In54] D. R. Inglis, *Phys Rev* **96** (1954) 1059.
- [Ja75] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, 1975.

- [JB50] J. D. Jackson e J. M. Blatt, *Rev. Mod. Phys.* **22** (1950) 77.
- [JF58] R. C. Jensen e A. W. Fairhall, *Phys. Rev.* **109** (1958) 942.
- [Jo71] A. Johnson, H. Ryde e S. A. Hjorth, *Nucl. Phys.* **A179** (1972) 753.
- [Ke73] G. A. Keyworth, J. R. Lemley, C. E. Olsen, F. T. Seibel, J. W. T. Dabbs e N. W. Hill, Third International Symposium of the Physics and Chemistry of Fission, vol 1 (1973) 85; *Phys. Rev.* **C8** (1973) 2352.
- [Kn66] D. J. Knecht et al., *Phys. Rev.* **148** (1966) 1031.
- [Ko68] L. Lowalsky, J. C. Jogodne e J. M. Miller, *Phys. Rev.* **169** (1968) 894.
- [Ko86] S.E. Koonin, *Computational Physics* (Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1986).
- [Ko92] M. Koshiha, *Phys. Rep.* **220** (1992) 229.
- [Ku86] W. Kündig et al., *Weak and Eletromagnetic Interactions in Nuclei*, edited by H. V. Klapor, Springer, Berlin, 1986.
- [La47] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell, *Nature* **159** (1947) 694.
- [La96] Yu. A. Lazarev e col., *Phys. Rev.* **C54** (1996) 620.
- [Le57] L. M. Lederman et al., *Phys. Rev.* **105** (1957) 1415.
- [Le74] A. Leprête et al, *Nucl. Phys.* **A219** (1974) 39.
- [LS78] C. M. Lederer e V. S. Shirley (Eds.), “Table of Isotopes”, Wiley, New York, 1978.
- [Lu80] V. A. Lubimov et al., *Phys. Lett.* **94B** (1980) 266.
- [LY56] T. D. Lee e C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104** (1956) 254.
- [MA40] E. McMillan e P. H. Abelson, *Phys. Rev.* **57** (1940) 1185.
- [Ma49] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1969; **78** (1950) 16.
- [Ma68] H. Marshak e col., *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 554.
- [Ma75] N. Marty et al, *Nucl. Phys.* **A230** (1975) 93.
- [MG69] U. Mosel e W. Greiner, *Z. Phys.* **A222** (1969) 261.
- [Mi67] A. Michalowicz, “Kinematics of Nuclear Reactions”, Iliffe Books Ltd, London, 1967.
- [Mi87] K. Miura e col., *Nucl Phys.* **A467** (1987) 79.
- [MN55] B. R. Mottelson e S. G. Nilsson, *Phys. Rev.* **99** (1955) 1615.
- [Mo30] N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A126** (1930) 259.
- [Mo59] R. Mössbauer, *Z. Phys.* **151** (1958) 124.
- [Mo88] S. Mordechai et al, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 531.
- [MT68] E. Migneco e J. P. Theobald, *Nucl. Phys.* **A112** (1968) 603.
- [Mu67] M. L. Muga, C. R. Rice e W. A. Sedlacek, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 404.
- [Mv67] K. W. McVoy, *Ann. of Phys.* **43** (1967) 91.
- [MS77] W. D. Myers, J. Swiatecki, T. Kodama, L. J. El-Jaick e E. R. Hilf, *Phys. Rev.* **C15** (1977) 2032.
- [MV94] M. K. Moe e P. Vogel, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **44** (1994) 247.
- [Na70] J. B. Natowitz, *Phys. Rev.* **C1** (1970) 623.
- [Ne60] W. E. Nervik, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1685.
- [Ni55] S. G. Nilsson, *Dan. Mat.-Fys. Medd.* **29** (1955) no. 16.
- [NN53] K. Nishijima e T. Nakano, *Prog. Theoret. Phys.* **10** (1953) 581.

- [No50] L. Nordheim, *Phys. Rev.* **78** (1950) 294.
- [Og75] Yu. Ts. Oganessian e col., *Nucl. Phys.* **A239** (1975) 353.
- [Og99] Yu. Ts. Oganessian e col., *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3154.
- [Pa33] W. Pauli, “Rapports du Septième Conseil de Physique Solvay”, Bruxelles, 1933, Gauthiers-Villars & Cie, Paris, 1934.
- [Pa52] A. Pais, *Phys. Rev.* **86** (1952) 663.
- [Pa68] D. Paya e col., Nuclear Data for Reactors, IAEA, Vienna, vol II (1968) 128.
- [PB60] R. V. Pound e G. A. Ribka, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 337.
- [PC61] J. L. Powell e B. Crasemann, “Quantum Mechanics”, Addison-Wesley, Reading MA, pag. 140.
- [Pe50] I. Perlman, A. Ghiorso e G. T. Seaborg, *Phys. Rev.* **77** (1950) 26.
- [Pe63] F. G. Perey, *Phys. Rev.* **131** (1963) 745.
- [PL74] F. Plasil - Proc. of the Int. Conf. on Reactions between Complex Nuclei, Nashville, 1973 (North Holland Pub. Co., 1974).
- [Po62] S. M. Polikanov e col., *Soviet Phys. JETP* **15** (1962) 1016.
- [PS90] Š. Piskoř e W. Schäferlingová, *Nucl. Phys.* **A510** (1990) 301.
- [PW71] A. Pitthan e Th. Walcher, *Phys. Lett.* **318** (1971) 563
- [Ra33] I.I. Rabi et al., vários trabalhos no *Physical Review* entre 1933 e 1936.
- [Ra877] Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A29** (1879) 91, *Phil. Mag.* **14** (1882) 184
- [RC53] F. Reines e C. L. Cowan, *Phys. Rev.* **92** (1953) 830
- [Re65] “Fundamentals of Statistical and Thermal Physics”, F. Reif, Mc Graw-Hill, Tokio, 1965
- [Re68] P. V. Reid, *Ann. Phys* (NY) **50** (1968) 411
- [RH50] L. Rosen e A. M. Hudson, *Phys. Rev.* **78** (1950) 533
- [Ro51] J. M. Robson, *Phys. Rev.* **83** (1951) 349.
- [RT64] B. W. Ridley e J. F. Turner, *Nucl. Phys.* **58** (1964) 497.
- [Ru11] E. Rutherford, *Phil. Mag.*, **21** (1911) 669.
- [Sc26] E. Schrödinger, *Ann. der Phys.* **79** (1926) 361 e 489
- [Sc54] L. I. Schiff, *Prog. Teo. Phys.* **11** (1954) 288.
- [SC55] O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand e T. Ypsislantis, *Phys. Rev.* **100** (1955) 947
- [Si97] A. de Silva, M. K. Moe, M. A. Nelson e M. A. Vient, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 2451.
- [SJ50] H. Steinwedel e J. H. Jensen, *Z. Naturforsch.* **52** (1950) 413.
- [Sk66] S. J. Skorka et al., *Nucl. Data* **2** (1966) 347.
- [Sm95] R. Smolanczuk e col., *Phys. Rev.* **C52** (1995) 1871
- [So70] A. J. Soinsky, R. B. Frankel, Q. O. Navarro e D. A. Shirley, *Phys. Rev.* **C2** (1970) 2379.
- [ST37] J. Schwinger e E. Teller, *Phys. Rev.* **52** (1937) 286.
- [St67] V. M. Strutinsky, *Nucl. Phys.* **A95** (1967) 420.
- [St70] E. P. Steinberg, B. D. Wilkins, S. B. Kaufman e M. J. Fluss, *Phys. Rev.* **C1** (1970) 2046.

- [Ta96] N. Takaola, Y. Motomura e K. Nagao, *Phys. Rev.* **C53** (1996) 1557.
- [Th84] C. E. Thorn et. al., *Phys. Rev.* **C30** (1984) 1442.
- [Tv72] A. Tvester, *Nucl. Phys.* **A185** (1972) 433.
- [Wa52] B. E. Watt, *Phys. Rev.* **87** (1952) 1037.
- [Wa58] A. H. Wapstra, *Handbook der Physik* **38** parte 1, Berlin - Goettingen - Heidelberg (1958).
- [Wa93] L. Wang e colab., *Phys. Rev.* **47** (1993) 2123.
- [We35] C. F. von Weizsäcker, *Z. Phys.* **96** (1935) 4.
- [We51] V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **83** (1951) 1073.
- [We67] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.
- [We75] G. W. Wetherill, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25** (1975) 283.
- [Wu57] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes e R. P. Hudson, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413.
- [Yu35] H. Yukawa, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* **17** (1935) 48.
- [ZM73] A. M. Zebelman e J. M. Miller, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 27.
- [Zw64] G. Zweig, *CERN Report* N° 8182/TH401, 1964 (unpublished).

Livros de física nuclear recomendados para eventual consulta:

Em Inglês:

- J. M. Blatt e V. F. Weisskopf, “Theoretical Nuclear Physics”, John Wiley, New York, 1952.
- R. D. Evans, “The Atomic Nucleus”, McGraw-Hill, New York, 1955.
- I. Kaplan, “Nuclear Physics”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1955.
- M. A. Preston, “Physics of the Nucleus”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.
- H. A. Enge, “Introduction to Nuclear Physics”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
- W. E. Meyerhof, “Elements of Nuclear Physics”, McGraw-Hill, New York, 1967.
- K. S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”, John Wiley, New York, 1988.
- N. A. Jelley, “Fundamentals of Nuclear Physics”, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- K. Heyde, “Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics”, Institute of Physics Publishing, London, 1994.
- P. Hodgson, E. Gadioli e E. Gadioli-Erba, “Introductory Nuclear Physics”, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- S. Wong, “Introductory Nuclear Physics”, Wiley, New York, 1998.

Em Português:

- T. M. Kuckuk, “Física Nuclear”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984.
- E. F. Pessoa, F. A. B. Coutinho e O. Sala, “Introdução à Física Nuclear”, Editora da Universidade de S. Paulo, 1978.
- E. de Almeida e L. Tauhata, “Física Nuclear”, Guanabara Dois, 1981.